

РАВНОВЕСИЕ ВАЛЬРАСА В МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕГИОНОВ С УСЛОВНЫМИ ЦЕНТРАМИ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА И ПРИКЛАДНОГО МЕТОДА

Для одной из модификаций оптимизационной межрегиональной межотраслевой модели (модели с условными центрами) рассматривается два подхода к ценовому равновесию: универсальная конструкция эквивалентного обмена, используемая в прикладных исследованиях и введенная именно для этой модификации модели в теоретической работе В. И. Сулова и В. А. Васильева, и конструкция равновесия по Вальрасу. Дается обзор двух этих подходов, доказывающаяся равновесность по Вальрасу состояния эквивалентного обмена. Проведена серия экспериментальных расчетов, подтверждающая, что для модификации модели с условными центрами две конструкции равновесия эквивалентны.

Ключевые слова: модели общего равновесия (CGE), модель взаимодействия регионов, оптимизационная межрегиональная межотраслевая модель, равновесия Вальраса и Нэша, k -ядра, ядро кооперативной игры.

Введение

Одним из востребованных современных инструментов в прикладных экономических исследованиях являются вычислимые модели общего равновесия (CGE) [1]. Основной тип задач, которые они выполняют, – комплексное отслеживание последствий от каких-либо изменений экономической ситуации: например, изменения в фискальной политике, либерализация внешней торговли и т. п. Структура и детализации тех или иных блоков модели, ее входов и выходов, которые могут меняться в зависимости от решаемых задач.

Самыми распространенными критериями классификации вычислимых моделей общего равновесия являются наличие в модели динамики и пространственная детализация.

В динамических моделях теория общего равновесия дополняется аппаратом, заимствованным из макроэкономических моделей с межвременной оптимизацией (например, модель перекрывающихся поколений или модель Рамсея). Результатом решения этих моделей являются уже не просто равновесные значения переменных, а равновесные траектории.

Если нас интересуют краткосрочные последствия той или иной экономической реформы, то можно использовать статическую CGE-модель. А если мы хотим изучить долгосрочные последствия, то нужна динамическая модель. С другой стороны, чем более подробно модель описывает структуру экономики, тем сложнее сделать ее динамической: «Very few large-scale CGE models are dynamic because of their intrinsic complexity» [2].

Кроме деления на динамические и статические, CGE-модели можно разбить на несколько видов по региональной структуре. Назовем локальными модели, которые описывают экономику одного региона (например, одну страну [3; 4] или один из регионов страны [5]). Назовем многорегиональными модели, в которых описываемый объект разбит на несколько отдельных регионов. Обычно это модели страны разбитой на регионы (например, [6–8]) или

группы стран [9]. Назовем глобальными модели, которые описывают всю мировую экономику, при этом земной шар обычно делят на несколько регионов (например, [10; 11]).

Также, кроме факторов динамики и пространства, в [1] приводится классификация по типу равновесной конструкции, используемой в модели. Первая группа моделей сформировалась на основе Леонтьевской модели затрат-выпуска и экономических моделей краткосрочного периода, широко используемых с 1930-х гг. В настоящее время эти макромоделли стали особенно популярны для анализа политики в развивающихся странах. Наиболее известным на сегодняшний день автором в этой области CGE-моделирования является американский экономист Л. Тэйлор [12]. Во вторую группу CGE-моделей входят модели вальрасовского типа или вальрасовские CGE-модели, представляющие собой практическую реализацию известной модели общего экономического равновесия Вальраса. CGE-модели вальрасовского типа получили распространение после работы Харбергера [13], в которой он оценивал эффект от налогообложения в двухсекторной модели. Кроме того, существенное влияние на развитие этого типа CGE-моделей оказала работа Х. Скарфа [14], описывающая алгоритм численного разрешения системы уравнений Вальраса.

Математически данные модели представляют собой систему уравнений, решением которой является состояние экономического равновесия.

Настоящая работа сфокусирована на теоретическом аспекте моделирования равновесных состояний на одном классе межрегиональных моделей типа оптимизационных мультирегиональных межотраслевых моделей (ОМММ) [15]. Модели типа ОМММ изначально не разрабатывались в качестве моделей общего равновесия. Основная и изначальная их задача – прогнозирование экономики страны в межрегиональном и межотраслевом разрезе.

Их отличительной чертой является:

- отсутствие детализации экономических агентов на микроуровне (общая для всех CGE черта – наличие таких типов агентов, как домохозяйства, фирмы, государство). Все агенты в моделях типа ОМММ однотипны – это регионы;
- максимальная детализация пространственного взаимодействия субъектов (регионов). В наиболее модифицированных модификациях ОМММ детально учитывается транспортная топология межрегиональной системы (описание потоков межрегиональных и внешних перевозок).

Однако существуют постановки моделей равновесия различного типа (Вальраса, Нэша, Эджворта) на основе ОМММ [16]. К примеру, Вальрасовская постановка модели равновесия на основе ОМММ в силу детализированности и реалистичности межотраслевого и межрегионального уровня модели, а также в силу наличия эффективного алгоритма поиска равновесия [17] по всем критериям является CGE и может служить мощным инструментом для решения определенного круга прикладных задач.

Понятие равновесия Вальраса для ОМММ впервые в отечественной литературе возникло в работах А. Г. Гранберга, В. И. Сулова [15]. Понятие равновесия в данных работах сформулировано для параметрической задачи линейного программирования (параметр – вектор территориальной структуры конечного потребления). Определение опирается на теорию двойственности линейного программирования, а именно: система уравнений Вальраса строится на послеоптимизационном этапе из компонентов прямого и двойственного оптимального плана ОМММ. Уравнения данной системы являются региональными макрофинансовыми балансами. Левая (пассивная) часть макрофинансового баланса региона является его конечным потреблением в оценках (региональная компонента функционала прямой задачи), правая (активная) часть – складывается из ресурсного потенциала в оценках и сальдо взаимодействия в оценках (региональная компонента функционала двойственной задачи). Выполнение одновременно всех региональных макрофинансовых балансов означает достижение равновесного состояния. Эти же авторы разработали эффективный алгоритм поиска равновесных состояний. Алгоритм итерационно варьирует управляющий параметр (вектор территориальной структуры потребления) до достижения равновесного состояния. Данная конструкция использовалась для прикладного равновесного анализа Российской экономики в региональном разрезе. Конструкция равновесия является гибкой в смысле структуры модели, для которой определяется равновесие. Этот аспект позволяет проводить прикладной равновесный анализ для достаточно сложных и реалистичных модификаций оптимизационных межрегиональных моделей без роста ре-

сурсоемкости алгоритма поиска при усложнении структуры модели. Единственным недостатком данной конструкции является отсутствие математической теоретической базы, а именно: для данной конструкции равновесия не сформулированы теоремы существования, теоремы о связи равновесия Вальраса и коалиционного (Нэшевского) равновесия.

Первой теоретической работой в российской литературе в области равновесия в модели взаимодействия регионов является совместная работа В. А. Васильева и В. И. Сулова [16]. В данной работе для упрощенной модификации мультирегиональной модели экономики (модели с условными центрами) сформулированы понятия k -ядер Эджворта, равновесия Вальраса, доказана теорема существования равновесия Эджворта (обобщение Нэшевского равновесия), доказано утверждение о включении множества равновесий Вальраса в множество равновесий Эджворта. При этом математическая конструкция равновесия Вальраса, введенная в [16], является традиционной (оптимальность всех индивидуальных целевых функций на соответствующих данному равновесному вектору цен бюджетных множествах + общий баланс ввоза-вывоза).

Настоящая работа носит теоретический характер. Перед авторами стояла задача выстроить мост между теоретическими и прикладными конструкциями. Задача является содержательной и актуальной, поскольку даже для упрощенной модификации ОМММ (с условными центрами) конструкции равновесий Вальраса из [16] и [18] математически отличаются, и эквивалентность неочевидна. Авторы данной статьи [17] разработали вычислительные алгоритмы поиска равновесий Вальраса и k -ядер Эджворта, основанные на «теоретически чистых» конструкциях, описанных в [16], и провели экспериментальные расчеты, подтверждающие взаимное расположение равновесных множеств Эджворта и Вальраса. В настоящей работе предпринята попытка математически и с помощью серии экспериментальных расчетов показать эквивалентность прикладного и теоретического подходов к равновесию Вальраса в случае модели с условными центрами. Положительный результат об эквивалентности двух подходов к равновесию Вальраса в случае упрощенной модификации модели имеет теоретическую ценность, так как показывает теоретическую корректность конструкций, давно используемых в прикладных расчетах по ОМММ.

Описание модели взаимодействия регионов с условными центрами и ассоциированной с ней параметрической задачей линейного программирования дано в [16; 17], но для удобства читателя вынесено в приложение 1. Определение Равновесия Вальраса из [16] и описание вычислительного алгоритма поиска равновесий из [17] представлено в приложении 2. В первом основном разделе статьи дано определение равновесия Вальраса, соответствующее прикладному подходу, и описание алгоритма поиска равновесного состояния из [15]. Во втором разделе математически доказывается эквивалентность равновесных состояний, даваемых каждым из подходов, затем то же самое подтверждается серией экспериментальных расчетов.

Положительный результат об эквивалентности двух подходов к равновесию Вальраса в случае упрощенной модификации модели имеет теоретическую ценность, так как показывает теоретическую корректность конструкций, давно используемых в прикладных расчетах по ОМММ.

Равновесие как состояние эквивалентного обмена (прикладной подход)

Описание межрегиональной модели с условными центрами приведено в [17] и вынесено в приложение 1.

Прикладной подход математически отличается от описанного в [17] и вынесенного в приложение 2 теоретического подхода. Понятие равновесия формулируется в терминах параметрической задачи линейного программирования:

$$(\lambda): \begin{cases} z \rightarrow \max \\ \omega^s : z^s - \lambda^s z \geq 0, \forall s \in \mathbf{R} \\ p^s : A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + z^s d^s, \forall s \in \mathbf{R} \\ p_{uv} : \sum_{s \in \mathbf{R}} u^s \geq \sum_{s \in \mathbf{R}} v^s \end{cases}$$

Задача, двойственная к (λ) :

$$(\lambda)^* : \begin{cases} \sum_{s \in \mathbf{R}} p^s \cdot b^s \rightarrow \min \\ z : -\sum_{s \in \mathbf{R}} \lambda^s \omega^s \leq 1 \\ z^s : -d^s \cdot p^s + \omega^s \leq 0 \quad \forall s \in \mathbf{R} \\ x^s : p^s (A^s)^T \leq 0 \quad \forall s \in \mathbf{R} \\ u^s : p^s (G^s)^T + p_{uv} \leq 0 \quad \forall s \in \mathbf{R} \\ v^s : p^s (H^s)^T - p_{uv} \leq 0 \quad \forall s \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

Оптимальный план, при фиксированном на единичном симплексе векторе территориальной структуры $(\lambda^s)_{s \in \mathbf{R}}$ (при условии, что все оценки ограничений на территориальную структуру ω^s ненулевые), соответствует точке на Парето-Границе множества $Z_M(\mathbf{R})$ [15]. Причем таким образом параметризуется вся Парето-граница (т. е. у каждого Парето-оптимального вектора конечных потреблений $(z^s) \in Z_M(\mathbf{R})$ есть прообраз $(\lambda^s)_{s \in \mathbf{R}}$ на симплексе). Исходя из этих соображений фиксированный вектор территориальной структуры будем в дальнейшем называть просто состоянием системы или точкой (имея в виду точку Парето-границы).

Понятие равновесия формулируется в терминах теории двойственности. Сначала приведем соображения, поясняющие экономический смысл используемых агрегатов. Для конкретного состояния системы функционал прямой задачи интерпретируется как общесистемное конечное потребление. В силу условий дополняющей нежесткости, записанных для ограничений ω^s и просуммированных, на оптимальном плане выполнено равенство

$$z = \sum_{s \in \mathbf{R}} \omega^s z^s.$$

Таким образом, для любого состояния системы общесистемное конечное потребление складывается из региональных конечных потреблений, выраженных в оценках. ω^s интерпретируется как стоимость единицы конечного потребления региона $s \in \mathbf{R}$.

Также в силу условий дополняющей нежесткости для ограничений p_{uv} :

$$(***) \sum_{s \in \mathbf{R}} p_{uv} \cdot (u^s - v^s) = 0.$$

Пусть $S^s = p_{uv} \cdot (u^s - v^s)$. S^s представляет собой сальдо ввоза-вывоза региона $s \in \mathbf{R}$, выраженное в ценах обмена.

Величина $Q^s = p^s \cdot b^s$ представляет собой стоимость ресурсного потенциала региона $s \in \mathbf{R}$.

В силу первой теоремы двойственности (равенство функционала прямой и двойственной задачи):

$$(***) z = \sum_{s \in \mathbf{R}} \omega^s z^s = \sum_{s \in \mathbf{R}} Q^s + \underbrace{\sum_{s \in \mathbf{R}} S^s}_{=0}.$$

Тождество (****) называют общесистемным макрофинансовым балансом, который означает, что в любом состоянии системы общесистемное конечное потребление равно суммарной стоимости ресурсного потенциала всех регионов.

С другой стороны, силу условий дополняющей нежесткости прямой и двойственной задачи (под знаком равенства подписано ограничение, для которого применяется дополняющая нежесткость в конкретном алгебраическом переходе):

$$\begin{aligned} \omega^s z^s &\stackrel{z^s}{=} (p^s \cdot d^s) z^s \stackrel{p^s}{=} Q^s - p^s \cdot (A^s x^s) - p^s \cdot (G^s u^s + H^s v^s) \stackrel{x^s}{=} Q^s - p^s \cdot (G^s u^s + H^s v^s) \stackrel{u^s, v^s}{=} \\ &= Q^s + p_{uv} \cdot u^s - p_{uv} \cdot v^s = Q^s + p_{uv} \cdot (u^s - v^s) = Q^s + S^s. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\text{****})^s \omega^s z^s = Q^s + S^s.$$

Тождество $(\text{****})^s$ называют макрофинансовым балансом региона $s \in \mathbf{R}$. Его экономический смысл заключается в том, что в любом состоянии системы стоимость конечного потребления региона складывается из стоимости его ресурсного потенциала и сальдо ввоза-вывоза.

Определение 1 [15]. Состояние системы $(\lambda^s)_{s \in \mathbf{R}}$ называется *равновесным (состоянием эквивалентного обмена)*, если в этом состоянии системы стоимость конечного потребления каждого региона в точности равна его ресурсному потенциалу, т. е. если $\forall s \in \mathbf{R} S^s = 0$.

В прикладных расчетах используется алгоритм, заключающийся в итерационном переборе состояний системы (векторов территориальной структуры), приводящий к равновесному состоянию.

Пусть $k \geq 0$ – номер итерации; $\omega^{s,k}, z^{s,k}, Q^{s,k}$ – величины, соответствующие состоянию $(\lambda^{s,k})_{s \in \mathbf{R}}$; ε – погрешность для критерия останова.

Описание алгоритма:

Если $\|\omega^{s,k} z^{s,k} - Q^{s,k}\|_2 < \varepsilon$, то *КОНЕЦ*

Иначе

$$\begin{aligned} \tilde{z}^{s,k} &:= \frac{Q^{s,k}}{\omega^{s,k}}; \\ \lambda^{s,k+1} &:= \frac{\tilde{z}^{s,k}}{\sum_{s \in \mathbf{R}} \tilde{z}^{s,k}}. \end{aligned}$$

Эквивалентность теоретического и прикладного подходов

В настоящем разделе мы приведем доказательство равновесности по Вальрасу (в теоретическом смысле) состояния эквивалентного обмена, описанного в предыдущем разделе.

Утверждение. Пусть, $(\bar{\lambda}^s)_{s \in \mathbf{R}}$ – состояние эквивалентного обмена; $((\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s)_{s \in \mathbf{R}}, \bar{z})$ – оптимальный план, соответствующий состоянию $(\bar{\lambda}^s)_{s \in \mathbf{R}}$ и $\forall s \in \mathbf{R} \bar{S}^s := \bar{p}_{uv} \cdot (\bar{u}^s - \bar{v}^s) = 0$, $\bar{p}_{uv} > 0$, $\bar{\lambda}^s > 0$.

Тогда $(\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s)_{s \in \mathbf{R}}$ – равновесие по Вальрасу; $\bar{p}_{uv} > 0$ – вектор равновесных цен.

Доказательство. Для доказательства будем пользоваться тем фактом, что необходимым и достаточным условием равновесности является сбалансированность и оптимальность соответствующих индивидуальных планов на бюджетном множестве соответствующего региона.

Сбалансированность выполнена в силу одного из ограничений задачи $(\bar{\lambda})$. Таким образом, достаточно показать, что $\forall s \in \mathbf{R} (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s)$ – оптимальное решение задачи:

$$(*)_{s, \bar{p}_{uv}} \begin{cases} z^s \rightarrow \max \\ p^s : A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + z^s d^s, \\ \$: \bar{p}_{uv} \cdot u^s \geq \bar{p}_{uv} \cdot v^s \end{cases}$$

Заметим, что допустимость плана $(\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s)$ для задачи $(*)_{s, \bar{p}_{uv}}$ следует из равенства $\bar{S}^s = 0$ и допустимости плана $((\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s)_{s \in \mathbf{R}}, \bar{z})$ в задаче $(\bar{\lambda})$.

Двойственная к $(*)_{s, \bar{p}_{uv}}$ задача имеет вид

$$(+)_{s, \bar{p}_{uv}} : \begin{cases} p^s \cdot b^s \rightarrow \min \\ x^s : p^s (A^s)^T \leq 0 \\ z^s : -d^s \cdot p^s \leq 1 \\ u^s : p^s (G^s)^T + \bar{p}_{uv} \leq 0 \quad \forall s \in \mathbf{R} \\ v^s : p^s (H^s)^T - \bar{p}_{uv} \leq 0 \quad \forall s \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

Рассмотрим пару планов $(\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s)$, $(\bar{p}^s, 1)$, где $\bar{p}^s$ – двойственная оценка технологического ограничения региона s в задаче $(\bar{\lambda})$.

Тогда в силу того, что $\bar{p}^s$, $\bar{p}_{uv}$ входят в оптимальный план задачи $(\bar{\lambda})^*$ (а следовательно допустимы в ней), то выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} p^s (G^s)^T + \bar{p}_{uv} &\leq 0; \\ p^s (H^s)^T - \bar{p}_{uv} &\leq 0 \end{aligned}$$

(в силу ограничений задачи $(\bar{\lambda})^*$, соответствующих переменным u^s и v^s).

Ограничение x^s в задаче $(+)_{s, \bar{p}_{uv}}$ также выполнено в силу такого же ограничения в задаче $(\bar{\lambda})^*$.

Соотношение дополняющей нежесткости для ограничения z задачи $(\bar{\lambda})^*$ в случае совместности пары задач $(\bar{\lambda})$, $(\bar{\lambda})^*$ $z > 0$ будет иметь вид

$$\sum_{s \in \mathbf{R}} \bar{\lambda}^s \bar{\omega}^s = 1 (***) .$$

В силу наших предположений мы находимся на Парето-границе, т. е. $(\bar{\lambda})$, $(\bar{\lambda})^*$ совместны. Доли всех регионов в общесистемном потреблении положительны в силу предположения о невырожденности состояния $\bar{\lambda}$. Соотношение (***) вместе с последними соображениями и тем, что $\sum_{s \in \mathbf{R}} \bar{\lambda}^s = 1$, дает $\bar{\omega}^s = 1 \quad \forall s \in \mathbf{R}$.

Итак, ограничение z^s в задаче $(+)_{s, \bar{p}_{uv}}$ выполнено в силу ограничения z^s в задаче $(\bar{\lambda})^*$ и того, что $\bar{\omega}^s = 1$.

Таким образом, план $(\bar{p}^s, 1)$ допустим в задаче $(+)_{s, \bar{p}_{uv}}$.

Далее, в силу условий дополняющей нежесткости для пары задач $(\bar{\lambda})$, $(\bar{\lambda})^*$ и в силу равновесности состояния $\bar{\lambda}$ ($S^r = 0$) имеем следующие соотношения:

$$\bar{p}_i^s \left((A^s \bar{x}^s)_i + (G^s \bar{u}^s)_i + (H^s \bar{v}^s)_i - d_i^s \bar{z}^s - b_i^s \right) = 0, \quad i = \overline{1, n_s} \quad (1)$$

$$1(\bar{p}_{uv} \cdot \bar{u}^s - \bar{p}_{uv} \cdot \bar{v}^s) = 0 \quad (2)$$

$$\bar{x}_i^s \left(\bar{p}^s (A^s)^T \right)_i = 0, \quad i = \overline{1, n_s} \quad (3)$$

$$\bar{u}_i^s \left(\left(\bar{p}^s (G^s)^T \right)_i + 1 \bar{p}_{uvi} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (4)$$

$$\bar{v}_i^s \left(\left(\bar{p}^s (H^s)^T \right)_i - 1 \bar{p}_{uvi} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

В силу равновесности состояния $\bar{\lambda} \cdot \bar{\omega}^s \bar{z}^s = \bar{Q}^s = b^s \cdot \bar{p}^s$ и того, что $\bar{\omega}^s = 1$, имеем

$$\bar{z}^s = b^s \cdot \bar{p}^s. \quad (6)$$

Соотношения (1)–(6) дают полный набор условий дополняющей нежесткости для пары задач $(*)_{s, \bar{p}_{uv}}$, $(+)_s, \bar{p}_{uv}$. А так как выше была показана допустимость пары планов $(\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s)$, $(\bar{p}^s, 1)$ в этой паре задач, то по второй теореме двойственности задач линейного программирования $(\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s)$ – оптимальное решение задачи $(*)_{s, \bar{p}_{uv}}$, что и требовалось доказать.

Экспериментальные расчеты

Для подтверждения результата об эквивалентности двух равновесных конструкций была проведена серия экспериментальных расчетов на разработанном авторами малоразмерном программно-модельном комплексе. Среда разработки: пользовательский интерфейс – MS Excel; вычислительные алгоритмы равновесных конструкций – JAVA; 3d-визуализация – Matlab; линейный оптимизатор – Lpsyst.

Модель с условными центрами в разработанном комплексе представлена тремя регионами (Запад, Центр, Восток) и пятью отраслями (добыча, обработка, транспорт, строительство). Две из пяти отраслей (добыча, обработка) являются транспортабельными.

Для малоразмерной модели был проведен расчет равновесных состояний по теоретическому алгоритму (перебор ценовых векторов по единичной сфере) и по прикладному алгоритму (итерационный процесс по векторам территориальной структуры).

Матрицы модели подобраны таким образом, чтобы равновесных состояний было несколько. Ввиду того, что прикладной алгоритм на выходе дает только одно равновесное состояние, были перебраны все Парето-оптимальные стартовые состояния и построены зоны сходимости алгоритма к тому или иному равновесию.

Результаты расчетов численно и графически представлены в пространстве конечного потребления (z^1, z^2, z^3) . Для теоретического алгоритма также выведены равновесные векторы цен. Для прикладного алгоритма графически представлены зоны сходимости в проекции пространства Парето-оптимальных территориальных структур на первые две координаты (λ^1, λ^2) . Цвет точки на этом графике обозначает сходимость алгоритма с данной стартовой точкой к равновесию, соответствующему данному цвету.

Графическое изображение результатов состоит из трехмерного изображения Парето-границы, на которое нанесено изображение k -ядер системы регионов [16] и точек равновесия.

Далее представлены результаты расчетов.

Векторы равновесных цен, даваемые теоретическим алгоритмом:

$$\bar{p}^{(1)} = (0.584, 0.812);$$

$$\bar{p}^{(2)} = (0.671, 0.741);$$

$$\bar{p}^{(3)} = (0.782, 0.623).$$

Соответствующие вектора равновесных конечных потреблений:

$$\bar{z}^{(1)} = (1945.32, 1487.74, 878.65);$$

$$\bar{z}^{(2)} = (1914.3, 1488.23, 907.86);$$

$$\bar{z}^{(3)} = (1851.76, 1489.29, 951.91).$$

Вектор конечного потребления, соответствующий состоянию эквивалентного обмена (результат прикладного алгоритма для конкретного стартового состояния):

$$\bar{z} = (1945.38, 1487.74, 878.58).$$

Вектор оценок баланса ввоза-вывоза в состоянии эквивалентного обмена $\bar{p}_{uv}$ коллинеарен с вектором $\bar{p}^{(1)}$.

Как видно по результатам, для данного стартового состояния предельная точка прикладного алгоритма поиска эквивалентного обмена с точностью до второго знака совпадает с первым равновесием Вальраса, найденным теоретическим алгоритмом (рис. 1). Различия во втором знаке объясняются погрешностью оптимизатора и зависимостью прикладного алгоритма от заданной наперед точности в критерии останова.

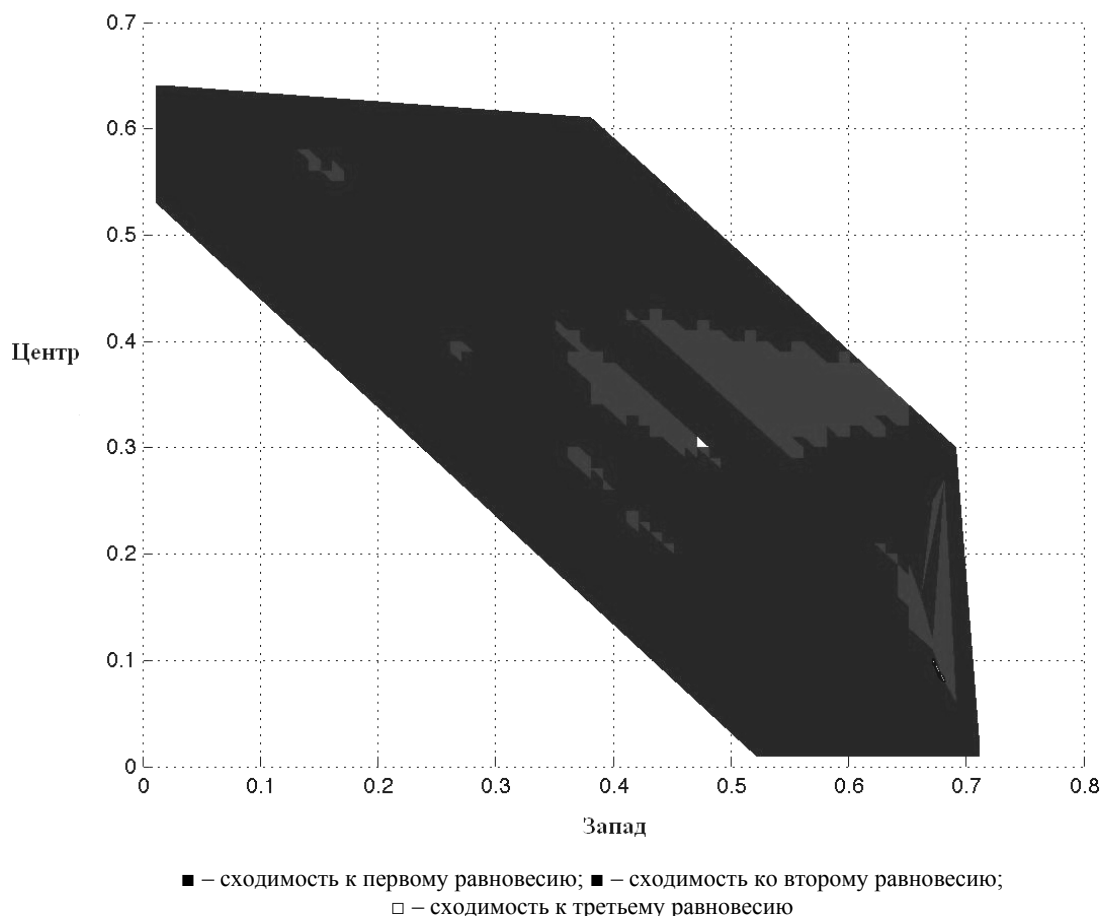
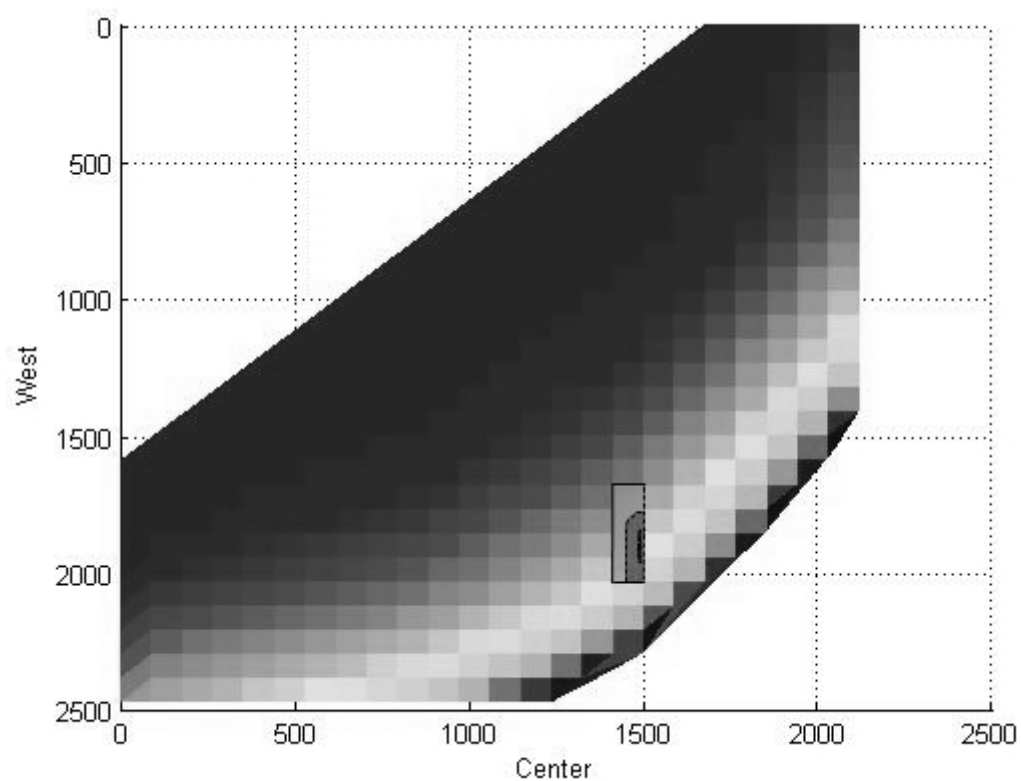


Рис. 1. Зоны сходимости прикладного алгоритма

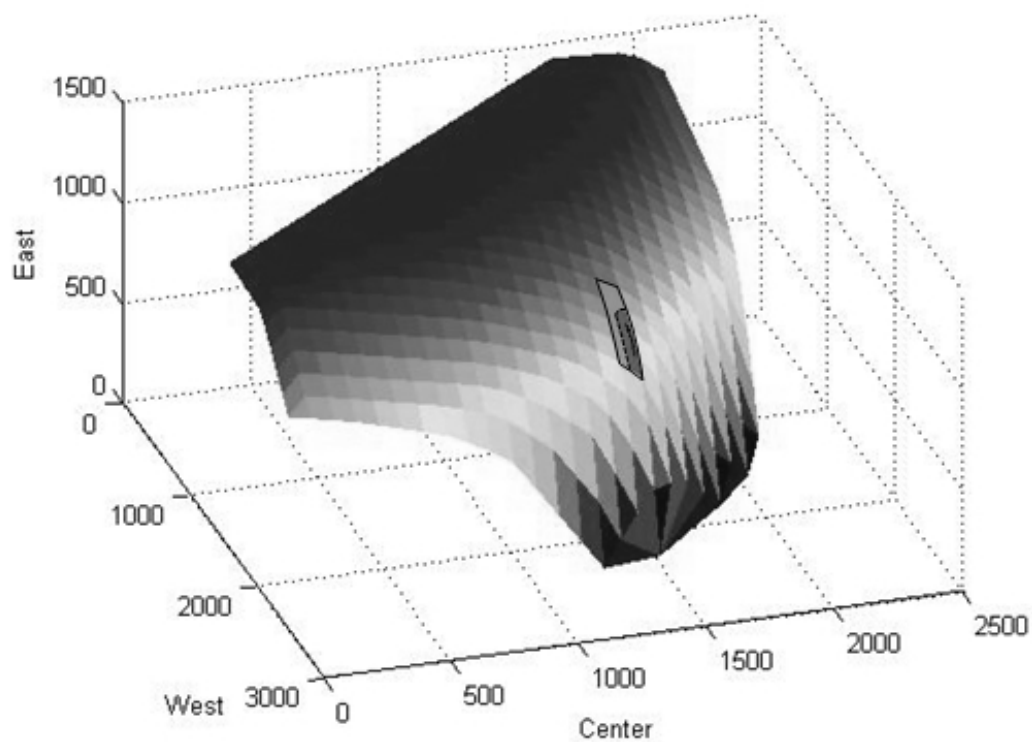
Стартовых состояний для первого равновесия заметно больше, чем для второго и третьего. Наличие нетривиальных областей сходимости у различных точек равновесия дает пищу для дальнейшего исследования по устойчивости равновесий Вальраса в межрегиональных моделях.

3D-представления результатов см. на рис. 2–4.



Парето-граница; ■ Ядро игры, ассоциированной с экономикой; ■ 2-ядро; ■ 3-ядро

Рис. 2. Проекция регионов 1–2



■ Ядро игры, ассоциированной с экономикой; ■ 2-ядро; 3-ядро

Рис. 3. Парето-граница



■ Ядро игры, ассоциированной с экономикой; ■ 2-ядро; ■ 3-ядро; ○ равновесия

Рис. 4. Фронтальная проекция 8x ZOOM: Парето-граница

По результатам расчетов можно сделать вывод о полной эквивалентности двух конструкций равновесия в нашей модели экономики. Данный результат показывает теоретическую корректность конструкции состояния эквивалентного обмена, используемой в прикладном анализе по наиболее модифицированным вариантам межрегиональной модели.

Заключение

По результатам работы можно сделать следующие выводы.

- Конструкция равновесия Вальраса, описанная в теоретической работе [16], годится только для модели взаимодействия регионов с условными центрами и не может быть распространена на более модифицированные варианты межрегиональной модели. В то же время конструкция состояния эквивалентного обмена [15], сформулированная в терминах ассоциированной с моделью задачи линейного программирования, является универсальной и может быть распространена на любую модификацию модели.
- Разработаны приложения, позволяющие проводить равновесный и коалиционный анализ системы регионов на основе ОМММ.
- Для модели с условными центрами доказана равновесность по Вальрасу состояния эквивалентного обмена. Экспериментальные расчеты также показали полную эквивалентность двух равновесных конструкций. Таким образом, была получена теоретическая непротиворечивость конструкции, используемой в прикладных исследованиях.
- Для итерационного процесса прикладного алгоритма поиска состояния эквивалентного обмена в экспериментальных расчетах (при наличии нескольких равновесий) обнаружено наличие зон сходимости к каждой из равновесных точек. Эффект наличия зон сходимости открывает перспективу нового исследования по устойчивости равновесных состояний в межрегиональных моделях.
- Возможность использования конструкции эквивалентного обмена для более сложных модификаций межрегиональной модели открывает перспективу исследования о взаимном расположении равновесий Вальраса и множества коалиционных равновесий (ядра модели) для наиболее общей модификации ОМММ. Содержательным вопросом данного исследования служит разработка конструкции множеств дележей коалиций системы регионов таким образом, чтобы состояние эквивалентного обмена не блокировалось никакой коалицией.

Приложение 1

Описание межрегиональной модели с условными центрами ¹

Рассматривается модель взаимодействия регионов вида [16]:

$$M = \left\langle \mathbf{R}, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s \in \mathbf{R}} \right\rangle,$$

где $\mathbf{R} = \{1, 2, \dots, r\}$ – множество (номеров) регионов;

$A^s - n_s \times n_s$ матрица материальных затрат региона $s \in \mathbf{R}$;

$G^s, H^s - n_s \times n$ матрицы, характеризующие способы ввоза и вывоза региона $s \in \mathbf{R}$;

n_s – количество отраслей, представленных регионом $s \in \mathbf{R}$;

n – количество транспортабельных отраслей экономики;

b^s, d^s – соответственно вектор ограничений на ресурсы, вектор затрат, связанных с целями развития региона $s \in \mathbf{R}$.

Технологические множества каждого региона $s \in \mathbf{R}$ задаются соотношением

$$X_s = \left\{ (x^s, u^s, v^s, z^s) \in \mathbb{R}_+^{n_s} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + z^s d^s \right\},$$

z^s – уровень конечного потребления региона $s \in \mathbf{R}$ (целевая переменная региона).

Множество сбалансированных планов произвольной коалиции регионов $T \subseteq \mathbf{R}$:

$$X_M(T) = \left\{ (x^s, u^s, v^s, z^s)_{s \in T} \in \prod_{s \in T} X_s \mid \sum_{s \in T} u^s \geq \sum_{s \in T} v^s \right\}.$$

Задача линейного программирования:

$$\begin{cases} z \rightarrow \max \\ z^s - \lambda^s z \geq 0, \quad \forall s \in \mathbf{R} \\ A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + z^s d^s, \quad \forall s \in \mathbf{R}, \\ \sum_{s \in \mathbf{R}} u^s \geq \sum_{s \in \mathbf{R}} v^s \end{cases}$$

где $(\lambda^s)_{s \in \mathbf{R}}, 0 \leq \lambda^s \leq 1, \sum_{s \in \mathbf{R}} \lambda^s = 1$ – вектор территориальной структуры конечного потребления,

по своей структуре совпадает с модификацией ОМММ с условными центрами [18].

В терминах подробного описания данной модификации ОМММ [18] матрицы и переменные модели M имеют следующий вид:

$$x^s = (x^s, \Delta x^s, u^s).$$

$$A^r = \begin{pmatrix} A^s & \Delta A^s & B^s \\ -h^s & -\Delta h^s & F^s \\ E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \\ -l^s & -\Delta l^s & 0 \end{pmatrix} \quad b^s = \begin{pmatrix} -q^s \\ 0 \\ -N^s \\ -\Delta N^s \\ -\tilde{u}^s \\ -L^s \end{pmatrix};$$

$$u^s = x^{+s}, \quad v^s = x^{s+}, \quad z^s = z^s;$$

¹ Подробное описание межрегиональной модели с условными центрами см. в [17].

$$G^s = C^{+s} = \begin{pmatrix} -\tilde{E} \\ c_u^s \end{pmatrix}, H^s = C^{s+} = \begin{pmatrix} -\tilde{E} \\ c_v^s \end{pmatrix}, d^s = \alpha^s.$$

В правых частях матричных выражений (индекс региона r опущен):

x – вектор объемов производства на производственных мощностях, имевшихся к началу прогнозного периода и сохранившихся к его концу (на старых мощностях), размерность n_s ;

$\Delta x = (\Delta^i x)_i^{N^s}$ – вектор объемов производства на вновь введенных в течение прогнозного периода мощностях (на новых мощностях); i – индекс способа производства, N – их количество, размерность вектора $n_s \cdot N^s$;

u – объем инвестиций. Если n_k – количество капиталобразующих отраслей, а количество способов инвестирования (приростов в линеаризованном законе роста инвестиций) равно N_k , то размерность вектора $n_k \cdot N_k$;

E – единичная матрица соответствующей размерности;

$A, \Delta A$ – технологические матрицы для базового объема производства и прироста производства, размерность $A - n_s \times n_s$, размерность $\Delta A - n_s \times (n_s \cdot N^s)$;

B – матрицы способов инвестирования для базового периода и для прироста инвестиций, размерность $n_s \times (n_k \cdot N_k)$;

h – матрица коэффициентов капиталоемкости на старых мощностях, размерность $n_k \times n_s$;

Δh – аналогичный вектор на новых мощностях (капиталоемкость ввода новых мощностей в течение прогнозного периода), размерность вектора $n_s \times (n_s \cdot N)$;

F – матрица линеаризации закона роста инвестиций, размерность $n_k \times (n_k \cdot N_k)$

l – вектор-строка коэффициентов трудоемкости на старых мощностях, размерность n_s

Δl – аналогичный вектор на новых мощностях, размерность $n_s \cdot c^s$;

q – вектор фиксированных объемов конечной продукции, включающих прирост запасов и сальдо экспорта-импорта продукции, размерность n_s ;

N – вектор старых мощностей производства, размерность n_s ;

ΔN – вектор верхних границ на всевозможные вводы новых производственных мощностей (ставятся обычно в некоторых регионах по некоторым отраслям добывающей промышленности и интерпретируются как соответствующие ограниченные природные ресурсы), размерность $n_s \cdot N^s$;

L – имеющиеся трудовые ресурсы (скаляр);

x^{s+}, x^{+s}, z^s – вектора вывоза продукции в другие регионы, ввоза продукции (размерность n) из других регионов и скаляр конечного потребления региона;

$\tilde{E}$ – матрица, образованная из единичной матрицы размерности n_s вычеркиванием столбцов, соответствующих отраслям с нетранспортабельной продукцией, и строки, соответствующей транспортной отрасли, размерность матрицы $(n_s - 1) \times n$;

c_u, c_v – вектора коэффициентов материальных затрат на вывоз из региона и ввоз в него продукции (предложенная запись блоков предполагает, что транспорт – последняя отрасль в классификации отраслей; следует обратить внимание, что последняя строка в матрицах вида B содержит коэффициенты затрат транспорта на внутрирегиональные перевозки продукции), размерность n ;

α – отраслевая структура текущего потребления домашних хозяйств и государства, размерность n_s . $0 \leq \alpha_j \leq 1, \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j = 1$.

Приложение 2

Равновесие Вальраса. Теоретический подход²

Рассматривается концепция ценового равновесия, при котором конечное потребление Рынок по Вальрасу подразумевает, что каждый субъект рынка (в данном случае регион) определяет свой спрос и предложение (вывоз-ввоз, экспорт-импорт продукции), максимизируя свою целевую функцию (конечное потребление населения) при бюджетном ограничении в текущих ценах обмена. При этом он не задумывается о партнерах или о каких-то целях общего характера. Далее на всех рынках работает закон спроса и предложения: цена растет, если совокупный спрос (ввоз и импорт) превышает совокупное предложение (вывоз и экспорт), и наоборот. Субъекты рынка пересматривают свои планы, пока не будет достигнуто равновесие.

Таким образом, рассматривается концепция ценового равновесия, при котором конечное потребление всех регионов в рамках своих бюджетов максимально и при этом достигнут общесистемный баланс ввоза-вывоза.

Определение 1 [1]. Сбалансированный план $\bar{x} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s)_{s \in \mathbf{R}} \in X_M(\mathbf{R})$ называется *вальрасовским равновесием*, если существует ненулевой вектор цен $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^n$ такой, что $\forall s \in \mathbf{R} \quad \bar{p} \cdot \bar{u}^s \geq \bar{p} \cdot \bar{v}^s$, и при этом выполнена импликация

$$\left((x_0^s, u_0^s, v_0^s, z_0^s) \in X_s \ \& \ z_0^s > \bar{z}^s \right) \Rightarrow \bar{p} \cdot u_0^s < \bar{p} \cdot v_0^s.$$

Здесь « $\cdot$ » – символ скалярного произведения. Множество равновесий Вальраса обозначается $W(M)$. Его проекцию на критериальное пространство будем обозначать $W^z(M)$.

Для поиска равновесных состояний мы будем пользоваться непосредственным следствием этого определения, а именно: индивидуальные планы $(\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s) \in X_s$, составляющие равновесный план, доставляют максимум конечному потреблению региона s на его бюджетном множестве $B_s(\bar{p}) = \{ (x^s, u^s, v^s, z^s) \in X_s \mid \bar{p} \cdot u^s \geq \bar{p} \cdot v^s \}$.

Предлагается следующий алгоритм поиска равновесных состояний:

1. Организуется перебор векторов цен p на единичной сфере в $\mathbb{R}_+^n$.
2. Решается r задач максимизации (для каждого региона $s \in \mathbf{R}$):

$$(*)_{s,p} \quad \begin{cases} z^s \rightarrow \max \\ A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + z^s d^s \\ p \cdot u^s \geq p \cdot v^s \end{cases}$$

Положим, $(x_*^s, u_*^s, v_*^s, z_*^s)$ – оптимальное решение задачи $(*)_{s,p}$.

3. Если среди планов вида $x_* = (x_*^s, u_*^s, v_*^s, z_*^s)_{s \in \mathbf{R}}$ есть сбалансированные, то по определению:

- а) p – равновесный вектор цен;
- б) сбалансированный план x_* является точкой равновесия.

Проверка сбалансированности плана, составленного из индивидуальных планов регионов в п. 3, может быть затруднена тем обстоятельством, что оптимальное решение задачи $(*)_{s,p}$ в общем случае не единственно, а является многогранным множеством (возможно, бесконечным). В этом случае прямой перебор оптимальных решений $(*)_{s,p}$ для проверки на сбаланси-

² Подробнее см. в [16; 17].

рованность составленного из них плана невозможен. Пункт 3 алгоритма технически реализован с помощью следующей системы неравенств:

$$(**)_{p, (z^s)_{s \in \mathbf{R}}} \begin{cases} A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + z^s d^s, \forall s \in \mathbf{R} \\ p \cdot u^s \geq p \cdot v^s, \forall s \in \mathbf{R} \\ z^s \geq z^s_*, \forall s \in \mathbf{R} \\ \sum_{s \in \mathbf{R}} u^s \geq \sum_{s \in \mathbf{R}} v^s \end{cases}.$$

Очевидно, что если $(**)_{p, (z^s)_{s \in \mathbf{R}}}$ совместна относительно переменных $(x^s, u^s, v^s, z^s)_{s \in \mathbf{R}}$, то p – вектор равновесных цен, а многогранное множество равновесных планов задается этой системой неравенств.

В наших экспериментальных расчетах мы ищем проекцию множества равновесных планов на критериальное пространство $Z_M(\mathbf{R})$. Пара $(p, (z^s)_{s \in \mathbf{R}})$ признается алгоритмом равновесной, если в п. 3 система $(**)_{p, (z^s)_{s \in \mathbf{R}}}$ совместна. Факт совместности системы проверяется с помощью стандартного пакета линейной оптимизации. В графических представлениях экспериментальных расчетов равновесия наносятся на Парето-границу множества $Z_M(\mathbf{R})$, алгоритм поиска которой описан в [17].

Список литературы

1. Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Сулакишин С. С. Применение вычислимых моделей в государственном управлении М.: Научный эксперт, 2007. 304 с.
2. Yang Z. A Coupling Algorithm for Computing Large-Scale Dynamic Computable General Equilibrium Models // *Economic Modelling*. 1999. Vol. 16, № 3. P. 455–473.
3. Bajo-Rubio O., Gomez-Plana A. G. Simulating the Effects of the European Single Market: A CGE Analysis for Spain // *Journal of Policy Modeling*. 2005. Vol. 27, № 6. P. 689–709.
4. Hosoe N. The Deregulation of Japan's Electricity Industry // *Japan and the World Economy*. 2006. Vol. 18, № 2. P. 230–246.
5. Learmonth D., McGregor P. G., Swales J. K., Turner K. R., Yin Y. P. The Importance of the Regional / Local Dimension of Sustainable Development: An illustrative Computable General Equilibrium Analysis of the Jersey Economy // *Economic Modelling*. In Press, Available online 22 June, 2006.
6. Dixon P. B., Rimmer M. T. The US Economy From 1992 to 1998 Results From a Detailed CGE Model. Monash University Center of Policy Studies Working Paper No. G-144, 2003. URL: <http://www.monash.edu.au/policy/>.
7. Diao X., Fan Sh., Zhang X. China's WTO Accession: Impacts on Regional Agricultural Income – a Multi-Region, General Equilibrium Analysis // *Journal of Comparative Economics*, 2003. Vol. 31, № 2. P. 332–351.
8. Lofgren H., Robinson Sh. Spatial-Network, General-Equilibrium Model with a Stylized Application Regional Science and Urban Economics. 2002. Vol. 32, № 5. P. 651–671.
9. Lee H., van der Mensbrugghe D. EU Enlargement and its Impacts on East Asia // *Journal of Asian Economics*. 2004. Vol. 14, № 6. P. 843–860.
10. Jacoby H. D., Reilly J. M., McFarland J. R., Paltsev S. Technology and Technical Change in the MIT EPPA Model Energy Economics // In Press, Corrected Proof, Available online 23 June 2006.
11. Lloyd P. J., MacLaren D. Measures of Trade Openness Using CGE Analysis // *Journal of Policy Modeling*. 2002. Vol. 24, № 1. P. 67–81.
12. Taylor L. Socially Relevant Policy Analysis: Structuralist Computable General Equilibrium Models for the Developing World. Cambridge (MA): MIT press, 1990.
13. Harberger A. The Incidence of the Corporate Income Tax // *Journal of Political Economy*. 1962. Vol. 70. P. 215–240.

14. Scarf H. The Computation of Economic Equilibria. New Haven; London: Yale University Press, 1984.
15. Суслов В. И. Измерение эффектов межрегиональных взаимодействий: модели, методы, результаты / Отв. ред. А. Г. Гранберг; ИЭОПП СО АН СССР. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1991. 252 с.
16. Васильев В. А., Суслов В. И. Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 18–33.
17. Доможиров Д. А., Гамидов Т. Г., Ибрагимов Н. М. Вычислительные алгоритмы равновесного и коалиционного анализа оптимизационной межрегиональной межотраслевой модели // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Социально-экономические науки. 2011. Т. 11, вып. 2. С. 21–38.
18. Суслов В. И. Равновесие в пространственных экономических системах // Сложные системы в экстремальных условиях: Тез. докл. XV Всерос. симпозиума с междунар. участием, 16–21 авг. 2010 г. Красноярск: Краснояр. науч. центр, СО РАН, Сиб. фед. ун-т, 2010. С. 68–69.

Материал поступил в редколлегию 30.05.2011

T. G. Gamidov, N. M. Ibragimov, D. A. Domozhirev

WALRASIAN EQUILIBRIUM IN A MODEL OF REGIONS' INTERACTION WITH CONDITIONAL CENTERS. EQUIVALENCE OF THEORETICAL APPROACH AND APPLIED TECHNIQUE

The paper considers two approaches to price equilibrium for one version of optimization interregional input-output model (model with conditional centers). The first approach represents the universal framework of equivalent exchange that is used in applied studies while the second one is a Walrasian equilibrium framework that was introduced exactly for this version of the model in theoretical works of V. Suslov and V. Vasilyev. The review of these two approaches is given, as well as the proof of Walrasian equilibrium for the state of equivalent exchange is presented. The series of computations is performed that approves the equivalence of two equilibrium frameworks for the version of the model with conditional centers.

Keywords: models of computational general equilibrium (CGE) model of regions' interaction, optimization interregional input-output model, Nash-Walras equilibria, k -cores, core of a cooperative game.