

УДК 332.012

Т. Г. Гамидов, Д. А. Доможиров, Н. М. Ибрагимов

Институт экономики
и организации промышленного производства СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: d.domozhistrov@gmail.com; tgamidov@gmail.com;
naimdjon@ieie.nsc.ru

РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ МОДЕЛЬЮ

Рассматривается наиболее модифицированный вариант оптимизационной межрегиональной межотраслевой модели (ОМММ), учитывающей прямые межрегиональные связи и падающую эффективность внешней торговли. Для данной модификации ОМММ вводятся новые типы вальрасовского равновесия. Для минимизации невязок уравнения равновесности был разработан туннельный алгоритм.

Ключевые слова: оптимизационная межрегиональная межотраслевая модель, равновесие Вальраса, векторная оптимизация, Парето-граница, методы глобальной оптимизации, туннельный алгоритм.

Введение

В работе [1] были рассмотрены конструкции равновесия Вальраса для упрощенного варианта оптимизационной межрегиональной межотраслевой модели (ОМММ) – модели с условным центром. Была доказана эквивалентность теоретической конструкции [2] и конструкции, эксплуатирующей двойственный аспект модели (понятие макрофинансовых балансов) [3]. Настоящая работа является логическим продолжением [1].

Заметим, что, хотя ОМММ активно используются в прикладном анализе и прогнозировании уже около сорока лет, первое глубокое математико-экономическое исследование самого простого варианта данной модели датируется 2010 г. [2]. В этой совместной работе В. А. Васильева (ИМ СО РАН им. Соболева) и В. И. Сулова (ИЭиОПП СО РАН) для модели с условным центром доказываются теоремы существования равновесий Вальраса и Эджворта, а также коалиционная неблокируемость вальрасовского равновесия в дроблении (реплике) экономики любой кратности (включение множества вальрасовских равновесий в множество эджвортовских). Богатство используемых математико-экономических конструкций во многом продиктовано простотой конструкции самой модели с условным центром, которая позволяет проводить прямые аналогии с классическими моделями математической экономики (к примеру, моделями типа Эрроу – Дебрё).

В своем прикладном варианте ОМММ имеет куда более сложную структуру. К примеру, в ней детализировано учитывается транспортная топология системы (транспортные затраты регионов-транзитеров). В данном варианте модели перевозки уже двух видов – межрегиональные и внешнеторговые (импорт и экспорт). Таким образом, если модель с условным центром была замкнутой системой, межрегиональная модель в прикладном варианте является открытой. В последнем варианте межрегиональной модели [4] присутствуют различные таможенные ограничения (ограничения на отдельные внешнеторговые способы и на суммар-

ные объемы внешней торговли). Причем если в более ранних вариантах модели верхние границы на экспорт и импорт были на отдельные переменные региональных внешнеторговых объемов, в модели [4], учитывающей падающую эффективность сегментов внешнего рынка, такие ограничения являются общесистемными. Несмотря на экзогенность мировых цен, предположение о падающей эффективности внешнего рынка в модели [4] задает эластичность мировых цен по объемам внешней торговли, которая в свою очередь настраивается как раз таки с помощью верхних границ на суммарные по регионам внешнеторговые способы. Каждому способу ставится в соответствие своя цена и ограничение сверху. Общесистемность таких ограничений отражает предположение о том, что только общесистемные объемы импорта и экспорта могут влиять на мировые цены.

Интуитивно понятно, что в открытой системе в определении равновесности должен играть роль внешнеторговый аспект, даже несмотря на то, что мировые цены в модели экзогенны. Кроме того, в расчетных экспериментах на малоразмерном варианте модели был получен пример того, что состояние эквивалентного обмена (состояние с нулевыми сальдо межрегиональных взаимодействий) блокируется некоторой коалицией регионов. Этот факт говорит о том, что состояние эквивалентного обмена, которое традиционно рассматривалось в предшественниках моделей типа [4] в качестве вальрасовского равновесия, совсем не обязательно лежит в ядре модели. Это обстоятельство противоречит классической математической экономике, где практически для всех моделей равновесия, позволяющих ассоциированную кооперативно-игровую постановку, вальрасовское равновесие лежит в ядре.

Таким образом, имеет место проблема постановки корректных конструкций равновесия Вальраса и кооперативной игры для открытой межрегиональной системы, порожденной ОМММ. Целью данной работы является рассмотрение конструкций вальрасовского равновесия, которые бы учитывали открытость модели [4], а также решение задачи поиска таких состояний. Кооперативно-игровой аспект остается за рамками настоящей работы.

Авторы рассматривают последний, наиболее модифицированный вариант ОМММ [4], детализированно учитывающий транспортную топологию как межрегиональных, так и внешнеторговых связей системы регионов, а также падающую эффективность внешней торговли. Данная модификация модели не позволяет сформулировать традиционную теоретическую конструкцию вальрасовского равновесия ввиду невозможности декомпозиции общесистемной задачи оптимизации на региональные. В терминах тождеств макрофинансовых балансов для данной модели мы сформулировали 2 новых типа равновесных состояний: равновесие в широком смысле и сильное равновесие. Отличие этих понятий от введенного ранее для данного класса моделей понятия эквивалентного обмена (см., например, [3; 5; 6]) заключается во включении в рассмотрение внешнеторгового аспекта, а именно: вектор равновесных цен содержит новые степени свободы – таможенные тарифы и курс иностранной валюты. Таким образом, в открытой межрегиональной системе, моделируемой с помощью ОМММ, равновесность определяется не только ценообразованием на продукты обмена, но и таможенной и валютной политикой.

В рассмотренном ранее А. Г. Рубинштейном, В. И. Суловым состоянии эквивалентного обмена равновесность означает равенство нулю всех региональных сальдо внутреннего обмена. Во введенном авторами понятии равновесия в широком смысле неэквивалентность межрегионального обмена у каждого региона компенсируется разностью его внешнеторговых сальдо во внутренних и мировых ценах с таможенными сборами. Сильным называется состояние равновесия в широком смысле, в котором к тому же имеет место эквивалентный межрегиональный обмен. В сильном равновесии, таким образом, сальдо внешней торговли в мировых и внутренних ценах у каждого региона отличаются на величину таможенных сборов. Для поиска равновесных состояний была предложена оптимизационная постановка, эквивалентная модели равновесия. Доказано, что состояния равновесия являются точками минимума некоторых функционалов, заданных неявным образом на единичном симплексе (пространстве территориальных структур конечного потребления). Достаточным условием равновесности является нулевое значение этих минимумов. Минимизируемые функционалы являются невязками соответствующих равновесных тождеств. Для поиска минимума невязок авторами предложен, математически обоснован и программно реализован туннельный алгоритм минимизации функционалов, заданных неявно. Разработанный алгоритм поиска равновесий различных типов был положительно протестирован серией экспериментальных расчетов на трехрегиональном пятиотраслевом модельном комплексе («Полигон»).

Краткое описание модели

В работе [1] авторы исследовали две конструкции равновесия Вальраса для упрощенной модификации модели взаимодействия регионов (модели с условным центром). В данной модели взаимодействие регионов между собой моделируется упрощенно. Транспортные связи регионов между собой не детализированы: у переменных вывоза / ввоза есть только один региональный индекс – индекс вывозящего / ввозящего региона. В модели имеет место нулевой баланс ввоза / вывоза, означающий замкнутость экономики (общий ввоз равен общему вывозу). Граф транспортных связей такой межрегиональной системы (вершины – регионы, дуги – связи) удобно представлять с наличием условного центра – виртуального контрагента, через который обмениваются между собой все регионы (рис. 1).

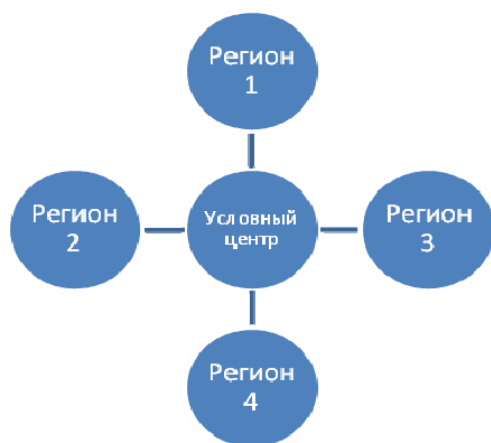


Рис. 1. Топология модели с условным центром

Первое – традиционное определение равновесия Вальраса – формулируется для модели взаимодействия регионов (прямым и ближайшим аналогом ее служит модель экономики типа Эрроу – Дебрё). Согласно этому определению [2], равновесность некоторого сбалансированного плана заключается в существовании таких цен обмена, для которых каждая региональная компонента указанного плана максимизирует целевую функцию соответствующего региона на бюджетном относительно данных цен множестве. Вторая конструкция формулируется в терминах ассоциированной с моделью экономики задачи векторной линейной оптимизации. Региональные целевые критерии в этой задаче агрегированы в общесистемный с помощью точки единичного симплекса методом, известным в литературе по многокритериальной оптимизации как метод достижения целей [7]. Точка единичного симплекса $\bar{\lambda}$

(вектор территориальной структуры конечного потребления) параметризует в критериальном пространстве Парето-границу задачи векторной оптимизации.

Согласно второму подходу равновесным называется такой вектор территориальной структуры конечного потребления $\bar{\lambda}$ (читай «такое Парето-оптимальное состояние системы регионов»), для которого выполнено тождество эквивалентного обмена, сформулированное в терминах оптимального прямого и двойственного планов задачи с этим $\bar{\lambda}$.

В работе [1] доказывалась эквивалентность двух этих определений равновесия для модели с условным центром.

В данной статье рассматривается последний наиболее модифицированный вариант ОМММ. Субъекты обмена в этой постановке разделены на две группы – регионы ($r, s \in R$) и внешние рынки $\bar{k} \in K$ (т. е. межрегиональная система является открытой). Граф транспортных связей системы может иметь произвольную структуру. Транспортные связи подразумевается прямыми, т. е. для каждой пары регионов $r, s \in R$ существуют переменные межрегиональных перевозок x^{rs} и x^{sr} , а также для каждой пары регион – внешний рынок $\bar{k}, r$ существуют переменные внешнеторговых перевозок – экспорта $v^{r\bar{k}}$ и импорта $v^{\bar{k}r}$ (внешняя торговля эндогенна). Размерность данных переменных равна количеству транспортабельных отраслей. При этом у каждой перевозки может быть один или несколько транзитеров. Граф транспортных связей такой модификации межрегиональной модели удобно задавать с помощью квадратной матрицы размерности $|R| + |K|$, позиция в которой означает индекс перевозки, а значение элемента – список регионов-участников этой перевозки (отправитель, все транзитеры и получатель). Матрица транспортной топологии системы порождает семейство матриц транспортных способов (межрегиональных и внешнеторговых). Принцип построения транспортных матриц для межрегиональных перевозок $C_r^{ss'}$ и для импортно-экспортных перевозок $D_r^{\bar{k}s}, D_r^{s\bar{k}}$ см. в подробном описании модели [4].

Для данной модификации модели авторами эксплуатируется как раз второй подход к определению равновесия (тождества макрофинансовых балансов, сформулированного в терминах оптимального прямого и двойственного плана задачи линейного программирования). Нетривиальная транспортная топология межрегиональной системы в данном случае не допускает декомпозицию системы на региональные составляющие (для построения задач максимизации отдельного региона на его бюджетном множестве). Это обстоятельство не позволяет напрямую наследовать традиционное определение вальрасовского равновесия от модели с условными центром.

Подробное описание модели с комментариями по экономическому смыслу двойственных оценок и используемых агрегатов имеется в [4] и вынесено для удобства читателя в приложение 1. В настоящем разделе приведем только математическое описание прямой и двойственной задачи с сохранением обозначений [4]. Перед знаком двоеточия в записи каждого ограничения приведено обозначение двойственной оценки этого ограничения.

Прямая задача

Региональный блок региона r (внутреннее балансовое ограничение – «Закон сохранения экономической материи»):

$$y^r: A^r x^r + H \left(\sum_{s,s' \in R} C_r^{ss'} x^{ss'} + \sum_{\bar{k} \in K, s \in R} D_r^{\bar{k}s} v^{\bar{k}s} + \sum_{\bar{k} \in K, s \in R} D_r^{s\bar{k}} v^{s\bar{k}} \right) + \alpha^r z^r \leq q^r. \quad (1)$$

Заметим, что для удобства мы используем агрегированную запись: в x^r включены компоненты, соответствующие приростным способам объемов производства, инвестициям; в A^r – столбцы технологических коэффициентов приростных способов производства, коэффициентов инвестиционных способов, а также строки, соответствующие балансу инвестиций, труда, ограничениям сверху на производство и инвестиции. То же самое касается вектора правых частей q^r . Кроме того, векторы импорта и экспорта также содержат компоненты всех приростных способов i_v , представляя собой построчную конкатенацию всех способов в порядке их эффективности, например:

$$v^{\bar{k}s} = \begin{pmatrix} v_{i_{v_1}}^{\bar{k}s} \\ v_{i_{v_2}}^{\bar{k}s} \\ \dots \\ v_{i_{v_N}}^{\bar{k}s} \end{pmatrix}, \text{ где } v_{i_v}^{\bar{k}s} - \text{количество импортных способов.}$$

Матрицы $D_r^{\bar{k}s}$ и $D_r^{s\bar{k}}$, в свою очередь, представляют собой постолбцовую конкатенацию N одинаковых подматриц (коэффициенты транспортных затрат одинаковы по всем внешне-торговым способам), например:

$$D_r^{\bar{k}s} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_r^{\bar{k}s} & \dots & \tilde{D}_r^{\bar{k}s} \end{pmatrix}.$$

Ограничения на территориальную структуру конечного потребления:

$$\omega^r: z^r - \lambda^r z \leq 0. \quad (2)$$

Ограничение внешнеторгового баланса:

$$\S: \sum_{\bar{k} \in K, s \in R} g_s^{\bar{k}+} \cdot v^{\bar{k}s} - \sum_{\bar{k} \in K, s \in R} g_s^{-\bar{k}} \cdot v^{s\bar{k}} \leq -\bar{S}_s. \quad (3)$$

Верхние границы способов импорта / экспорта:

$$\begin{aligned} \tau_v^{-\bar{k}}: \sum_{s \in S} v^{\bar{k}s} &\leq \hat{v}^{-\bar{k}}; \\ \tau_v^{\bar{k}+}: \sum_{s \in S} v^{s\bar{k}} &\leq \hat{v}^{\bar{k}+}. \end{aligned} \quad (4)$$

Знак « $\cdot$ » означает скалярное произведение. Подразумевается, что в векторах объемов внешней торговли компоненты сгруппированы и упорядочены по индексу продукта (отрасли) j и способа импорта / экспорта i_v . Аналогично для векторов внешнеторговых цен $g^{\bar{k}+}$ и $g^{\bar{k}-}$. Падающая эффективность внешней торговли реализована в виде отдельного вектора внешнеторговых цен для каждого способа импорта / экспорта. Дополнительные единицы объема импорта закупаются по более дорогой цене, экспорта – реализуются по более дешевой. Поэтому векторы импортных цен $g^{\bar{k}+}$ растут с ростом индекса способа импорта, а компоненты вектора экспортных цен $g^{\bar{k}-}$ – убывают. При этом в моделировании падающей эффективности сегментов внешнего рынка подразумевается, что каждый регион по отдельности не может объемами своей внешней торговли влиять на мировые цены – влияние оказывают только общесистемные объемы. По этой причине у векторов внешнеторговых цен нет индекса региона. Значение цены определяется сегментом внешнего рынка $\bar{k}$, внешнеторговым способом i_v и транспортабельной отраслью j . По той же причине верхние границы на способы импорта и экспорта, контролирующие эластичность мировых цен по объемам внешней торговли, являются общерегиональными, но детализированными по сегментам внешнего рынка. Компоненты этих верхних границ ($\hat{v}^{\bar{k}-}$, $\hat{v}^{\bar{k}+}$) монотонно возрастают по индексу способа i_v и сгруппированы по транспортабельным отраслям j .

Общие таможенные квоты:

$$\begin{aligned}\tau_v^- : \sum_{s \in S, \bar{k}, i_v} v_{i_v}^{\bar{k}s} &\leq \bar{v}^-; \\ \tau_v^+ : \sum_{s \in S, \bar{k}, i_v} v_{i_v}^{s\bar{k}} &\leq \bar{v}^+.\end{aligned}\quad (5)$$

Значения импортно-экспортных квот определяются только индексом транспортабельного продукта j .

Целевая функция:

$$z \rightarrow \max. \quad (6)$$

Двойственная задача

Региональный блок региона r :

$$x^r : (A^r)^T y^r \geq 0; \quad (7)$$

$$z^r : (\alpha^r)^T y^r - \omega^r \geq 0. \quad (8)$$

Межрегиональные потоки:

$$x^{ss'} : \sum_{r \in R} C_r^{ss'} y^r \geq 0, \quad s, s' \in R; \quad (9)$$

Внешнеторговые потоки:

$$v_{i_v}^{\bar{k}s} : \sum_{r \in R} \tilde{D}_r^{\bar{k}s} y^r + \left(g_{i_v}^{\bar{k}+} \right)^T + \tau_{vi_v}^{\bar{k}-} + \tau_v^- \geq 0, \quad s \in R, \bar{k} \in K, i_v = 1, \dots, N; \quad (10)$$

$$v_{i_v}^{s\bar{k}} : \sum_{r \in R} \left(\tilde{D}_r^{s\bar{k}} \right)^T y^r - \left(g_{i_v}^{s\bar{k}} \right)^T + \tau_{vi_v}^{\bar{k}+} + \tau_v^+ \geq 0, \quad s \in R, \bar{k} \in K, i_v = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Общесистемное ограничение:

$$z : \sum_{r \in R} \lambda^r \omega^r \geq 1. \quad (12)$$

Целевая функция:

$$\sum_{r \in R} q^r \cdot y^r - \$S_s + \sum_{\bar{k} \in K} \left(\hat{v}^{\bar{k}-} \cdot \tau_v^{\bar{k}-} + \hat{v}^{\bar{k}+} \cdot \tau_v^{\bar{k}+} \right) + \bar{v}^+ \cdot \tau_v^+ + \bar{v}^- \cdot \tau_v^- \rightarrow \min. \quad (13)$$

Равновесия Вальраса в модели с открытой торговлей

Заметим, что для полной модификации модели в отличие от модификации с условным центром традиционная конструкция равновесия Вальраса недопустима по причине нетривиальной транспортной топологии системы. Данная топология не допускает естественную декомпозицию общесистемной задачи максимизации на региональные. Для описания равновесных постановок в рамках полной модификации модели воспользуемся прикладной конструкцией, использующей теорию двойственности задач линейного программирования. Вопрос построения математической конструкции равновесия Вальраса для полной модификации модели, близкой к классической постановке для модели с условными центрами, пока остается открытым. Для формального определения приведем сначала некоторое математические выкладки и введем понятие макрофинансовых балансов.

Выделим в оптимальном значении прямой задачи региональные компоненты. Для этого запишем условия дополняющей нежесткости для ограничений (2) и просуммируем их по $r \in R$:

$$\left(\sum_{r \in R} \lambda^r \omega^r \right) z = \sum_{r \in R} \omega^r z^r.$$

Условия дополняющей нежесткости для (12) дают

$$\left(\sum_{r \in R} \lambda^r \omega^r \right) z = z.$$

Итак, из последних двух соотношений получим разложение оптимального значения функционала прямой задачи на региональные компоненты:

$$z = \sum_{r \in R} \omega^r z^r.$$

Аналогично поступим с оптимальным значением двойственного функционала. С учетом условий дополняющей нежесткости для (3)–(5) оптимальное значение двойственной задачи раскладывается на региональные компоненты следующим образом:

$$\sum_{r \in R} \left(q^r y^r - \$ \left(\sum_{\bar{k}} \left[g_s^{\bar{k}+} \cdot v^{\bar{k}r} - g_s^{\bar{k}-} \cdot v^{r\bar{k}} \right] \right) + \sum_{\bar{k}} \left[v^{r\bar{k}} \cdot \tau_v^{\bar{k}-} + v^{\bar{k}r} \cdot \tau_v^{\bar{k}+} \right] + \tau_v^+ \cdot \left(\sum_{\bar{k}, i_v} v_{i_v}^{\bar{k}r} \right) + \tau_v^- \cdot \left(\sum_{\bar{k}, i_v} v_{i_v}^{r\bar{k}} \right) \right).$$

Введем следующие обозначения.

$Q^r := q^r \cdot y^r$ – стоимость ресурсного потенциала региона r .

$\bar{S}_v^r = \$ \sum_{\bar{k}} \left(g_s^{\bar{k}+} \cdot v^{\bar{k}r} - g_s^{\bar{k}-} \cdot v^{r\bar{k}} \right)$ – внешнеторговое сальдо региона r в мировых ценах, выраженное во внутренней валюте.

$P_v^r := \sum_{\bar{k}} P_v^{r\bar{k}} = \sum_{\bar{k}} \left(\tau_v^{\bar{k}-} \cdot v^{r\bar{k}} + \tau_v^{\bar{k}+} \cdot v^{\bar{k}r} \right)$ – вклад региона r в стоимость таможенных сборов на

использование способов импорта и экспорта, обеспечивающих торговые объемы $\left\{ \hat{v}_{i_v}^{\bar{k}-}, \hat{v}_{i_v}^{\bar{k}+} \right\}_{i_v}$.

$P_v^{r\bar{k}}$ – то же самое для конкретного внешнего рынка $\bar{k}$. Этот агрегат можно интерпретировать как таможенные сборы по прогрессивной тарифной сетке, подразумевающей дополнительную плату за дополнительные внешнеторговые объемы на конкретном сегменте внешнего рынка (для каждого способа i_v и внешнего рынка $\bar{k}$ свой набор тарифов $\tau_{v,i_v}^{\bar{k}-}, \tau_{v,i_v}^{\bar{k}+}$).

Причем тариф $\left(\tau_{v,i_v,j}^{\bar{k}-}, \tau_{v,i_v,j}^{\bar{k}+} \right)$ взимается только, если для продукта j на рынке $\bar{k}$ достигнуты торговые объемы $\left\{ \hat{v}_{i_v,j}^{\bar{k}-}, \hat{v}_{i_v,j}^{\bar{k}+} \right\}$.

$T^r := \tau_v^- \cdot \left(\sum_{\bar{k}, i_v} v_{i_v}^{r\bar{k}} \right) + \tau_v^+ \cdot \left(\sum_{\bar{k}, i_v} v_{i_v}^{\bar{k}r} \right)$ – сумма дополнительных таможенных сборов на экспорт и импорт, когда исчерпаны все импортно-экспортные квоты. Эти сборы взимаются по единым

для всех внешних рынков тарифам $\left(\tau_v^+, \tau_v^- \right)$, причем тариф для конкретной транспортабель-

ной отрасли ненулевой только в том случае, если по данному продукту системой достигнуты соответствующие квоты импорта / экспорта.

С учетом первой теоремы двойственности оптимальные значения прямой и двойственной задачи равны, т. е.

$$\sum_{r \in R} (\omega^r z^r + \bar{S}_v^r) = \sum_{r \in R} (Q^r + T^r + P_v^r).$$

Данное соотношение называется общесистемным макрофинансовым балансом. Его содержательный смысл в том, что стоимость конечного потребления системы регионов с падающей эффективностью сегментов внешнего рынка с учетом внешней торговли в мировых ценах складывается из ресурсного потенциала и таможенных сборов.

Выведем региональный аналог этого соотношения. В следующих выкладках под знаком равенства подписаны номера ограничений, для которых мы используем соотношения дополняющей нежесткости в данном алгебраическом переходе:

$$\begin{aligned} \omega^r z^r &= (\alpha^r \cdot y^r) z^r \stackrel{(8)}{=} \stackrel{(1)}{=} Q^r - y^r \cdot \left(A^r x^r + \sum_{s, s'} C_r^{ss'} x^{ss'} + \sum_{\bar{k}, s} D_r^{\bar{k}s} v^{\bar{k}s} + \sum_{\bar{k}, s} D_r^{s\bar{k}} v^{s\bar{k}} \right) = \\ &= Q^r - \underbrace{y^r \cdot A^r x^r}_{=0 \text{ (7)}} - \underbrace{y^r \cdot \sum_{s, s'} C_r^{ss'} x^{ss'}}_{\text{обозначим } S^r} - \underbrace{y^r \cdot \left(\sum_{\bar{k}, s} D_r^{\bar{k}s} v^{\bar{k}s} + \sum_{\bar{k}, s} D_r^{s\bar{k}} v^{s\bar{k}} \right)}_{\text{обозначим } S_v^r}. \end{aligned}$$

В последнем соотношении:

S^r – сальдо межрегионального обмена региона r , выраженное во внутренних ценах обмена;

S_v^r – сальдо внешней торговли региона r , выраженное во внутренних ценах во внутренней валюте.

Итак, макрофинансовый баланс отдельного региона записывается следующим образом:

$$\omega^r z^r + S^r + S_v^r = Q^r.$$

Таким образом, в любом состоянии системы $(\lambda^r)_{r \in R}$ стоимость конечного потребления каждого региона во внутренних ценах с учетом межрегионального обмена и внешней торговли совпадает с его ресурсным потенциалом.

Для связи региональных макрофинансовых балансов с общесистемным сначала заметим, что по соотношениям дополняющей нежесткости для (9), просуммированным по s, s' , имеем

$$\sum_{r \in R} S^r = 0.$$

Таким образом, в любом состоянии системы $(\lambda^r)_{r \in R}$ общесистемное сальдо межрегионального обмена во внутренних ценах равно нулю. Заметим, что для конкретного региона данное соотношение в общем случае не выполнено.

Далее, запишем условия дополняющей нежесткости для ограничений (10)–(11), просуммированные по $\bar{k}, i_v$ и сложенные между собой:

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{k}, r} \left(v^{\bar{k}s} \cdot \left[(D_r^{\bar{k}s}) y^r \right] + v^{s\bar{k}} \cdot \left[(D_r^{s\bar{k}}) y^r \right] \right) - \bar{S}_v^s + T^s + P_v^s &= 0; \\ \sum_{\bar{k}, r} \left(v^{\bar{k}s} \cdot \left[(D_r^{\bar{k}s}) y^r \right] + v^{s\bar{k}} \cdot \left[(D_r^{s\bar{k}}) y^r \right] \right) &= \bar{S}_v^s - T^s - P_v^s. \end{aligned}$$

Просуммируем последнее соотношение по $s \in R$, переобозначим в правой части индекс суммирования с s на r , воспользуемся последними обозначениями для S_v^r и получим:

$$\begin{aligned} \sum_{r \in R} S_v^r &= \sum_{r \in R} \bar{S}_v^r - \sum_{r \in R} T^r - \sum_{r \in R} P_v^r; \\ \text{обозначим } S_v &\quad \text{обозначим } \bar{S}_v \quad \text{обозначим } T \quad \text{обозначим } P_v \\ \bar{S}_v - S_v &= T + P_v. \end{aligned}$$

Последнее соотношение назовем внешнеторговым тождеством. Таким образом, в любом Парето-оптимальном состоянии системы разница общесистемного внешнеторгового сальдо в мировых и внутренних ценах уравнивается таможенными сборами. Данное соотношение связывает процесс внутреннего ценообразования, валютную политику и таможенную тарификацию. Заметим, что региональный аналог данного равенства в общем случае не выполнен.

Пользуясь представлением для общесистемного внешнеторгового сальдо, перепишем общий макрофинансовый баланс во внутренних ценах, т. е. в виде, сопоставимом с региональным аналогом:

$$\sum_{r \in R} (\omega^r z^r + S_v^r) = \sum_{r \in R} Q^r.$$

Для различных вариантов записи макрофинансового баланса можно предложить различные варианты равновесных постановок. В каждом случае равновесное состояние конструктивно означает равенство всех региональных компонент общесистемного макрофинансового баланса.

Исходя из общесистемного макрофинансового баланса во внутренних ценах можно сформулировать первую концепцию равновесия как состояния эквивалентного обмена. Для данной записи невязкой между региональными компонентами правой и левой частей общесистемного макрофинансового баланса в соответствии с макрофинансовым балансом региона r будет сальдо межрегионального обмена:

$$Q^r - (\omega^r z^r + S_v^r) = S^r.$$

Состоянием эквивалентного обмена (равновесием в классическом смысле) назовем такое Парето-оптимальное состояние системы $(\lambda^r)_{r \in R}$, в котором

$$S^r = 0 \quad \forall r \in R.$$

В вектор равновесных цен в этом случае будут входить только цены обмена. Содержательное значение равновесия в классическом смысле – наличие таких цен внутреннего обмена $p_r^{rs} = (y^r)^T C_r^{rs}$, $p_r^{sr} = (y^r)^T C_r^{sr}$, что в данных ценах стоимость внутреннего спроса (ввоза) каждого региона уравнивается стоимостью внутреннего предложения (вывоза), и конечное потребление региона при этом максимально.

Исходя из общесистемного макрофинансового баланса с внешней торговлей в мировых ценах

$$\sum_{r \in R} (\omega^r z^r + \bar{S}_v^r) = \sum_{r \in R} (Q^r + T^r + P_v^r)$$

невязка региональных компонент правой и левой частей тождества в соответствии с макрофинансовым балансом региона r будет состоять из двух компонент (первая – невязка межрегионального):

$$Q^r + T^r + P_v^r - (\omega^r z^r + \bar{S}_v^r) \underset{\pm S^r, \pm S_v^r}{=} \underset{=0}{\left[Q^r - (\omega^r z^r + S^r + S_v^r) \right] + S^r + \left[S_v^r - (\bar{S}_v^r - T^r - P_v^r) \right]}.$$

Равновесием в широком смысле назовем такое Парето-оптимальное состояние, в котором

$$S^r = (\bar{S}_v^r - S_v^r) - (T^r + P_v^r) \quad \forall r \in R.$$

Поскольку в нашей постановке мировые цены (товарные курсы) хоть и эластичны по объемам внешней торговли, все же экзогенны, в вектор равновесных цен в данном случае будут входить внутренние цены обмена, таможенные тарифы и валютный курс (\$ – оценка ограничения торгового баланса). Заметим, что цены обмена региона r в данном случае включают ввозные и вывозные цены межрегионального обмена $p_r^{rs} = (y^r)^T C_r^{rs}$, $p_r^{sr} = (y^r)^T C_r^{sr}$ и внутренние цены франко-границы импортируемой и экспортируемой продукции $p_r^{\bar{kr}} = (y^r)^T D_r^{\bar{kr}}$, $p_r^{rk} = (y^r)^T C_r^{rk}$. Причем цены межрегионального и

внешнеторгового обмена в рамках механизма, реализованного в модели, варьируются не независимо друг от друга, а совместно, так как в их определении единственная и общая степень свободы – вектор оценок y^r .

Содержательное значение равновесия в широком смысле – наличие таких цен обмена, таможенных тарифов и валютного курса, при которых разница внутреннего спроса-предложения каждого региона уравнивается невязкой внешнеторгового тождества (разницы внешне-торговых сальдо во внутренних и внешних ценах и таможенных сборов), и конечное потребление региона при этом максимально. Рыночный механизм, реализующий данный тип равновесия затрагивает не только внутреннее ценообразование на продукты обмена, но также и таможенную и валютную политику.

Сильным равновесием назовем такое состояние равновесия в широком смысле, в котором для каждого региона имеет место эквивалентный межрегиональный обмен:

$$\begin{cases} S^r = 0, \\ \bar{S}_v^r - S_v^r = T^r + P_v^r \end{cases} \forall r \in R.$$

Другими словами, состояние сильного равновесия такое, в котором имеют место и эквивалентный обмен и выполнены все региональные компоненты внешнеторгового тождества.

Первое соотношение отвечает за эквивалентность межрегионального обмена, второе – за внешнеторговое ценообразование, оптимальную таможенную и валютную политику.

Оптимизационная постановка задачи поиска равновесий.

Туннельный алгоритм поиска равновесий

Параметрическая задача линейного программирования (1)–(6) с параметром территориальной структуры $(\lambda^r)_{r \in R}$ описывает в критериальном пространстве Парето-границу системы взаимодействия регионов. Оптимальный план этой задачи, соответствующий фиксированному на единичном симплексе вектору территориальной структуры конечного потребления, соответствует Парето-оптимальному состоянию задачи векторной оптимизации.

Для поиска состояния эквивалентного обмена в прикладных исследованиях по ОМММ используется итерационный эвристический алгоритм [3]. Он заключается в специальной корректировке компонент вектора $(\lambda^r)_{r \in R}$ на текущей итерации и последующем решении задачи оптимизации. А именно:

$$\begin{aligned} \bar{z}_k^r &:= \frac{\omega_k^r z_k^r + S_k^r}{\omega_k^r}, \\ \lambda_{k+1}^r &:= \frac{\bar{z}_k^r}{\sum_r \bar{z}_k^r}. \end{aligned}$$

Этот алгоритм является эффективным, так как не предполагает перебора всех Парето-оптимальных состояний. Сходимость и эффективность данного алгоритма математически не доказана, но они подтверждаются экспериментальными расчетами.

Эвристический алгоритм поиска эквивалентного обмена с очевидной аналогией был распространен авторами на поиск равновесия в широком смысле:

$$\begin{aligned} \bar{z}_k^r &:= \frac{Q_k^r + T_k^r + P_{kv}^r - \bar{S}_{kv}^r}{\omega_k^r}, \\ \lambda_{k+1}^r &:= \frac{\bar{z}_k^r}{\sum_r \bar{z}_k^r}. \end{aligned}$$

Последний эвристический алгоритм был протестирован на практике, он за несколько итераций (как правило меньше 10) приводит к равновесию в широком смысле.

Данные итерационные процессы по своей сути являются специально заданным обходом Парето-границы с проверкой равновесности каждой точки пребывания. Их главное достоинство – эффективность.

Авторы предприняли попытки построения итерационного процесса, сходящегося к сильному равновесию, но все они были безуспешными. Однако никакое комбинирование процессов, приводящих к нулевой невязке эквивалентного обмена и к нулевой невязке равновесности в широком смысле, ничего не дало для зануления общей (двухкомпонентной) невязки сильного равновесия. Сложность заключается именно в многокомпонентности невязки сильного равновесия. По этой причине был предложен другой подход к поиску равновесных состояний, обходящий эту проблему.

В силу теории двойственности задач линейного программирования оптимальный план одновременно прямой и двойственной задачи при фиксированном $(\lambda^r)_{r \in R}$ можно получить как решение системы неравенств, включающей ограничения прямой задачи (1)–(6), двойственной задачи (7)–(13) и равенство выражений для целевых функций прямой (6) и двойственной задач (13):

$$z = \sum_{r \in R} (Q^r - \bar{S}_v^r + P_v^r + T^r). \quad (14)$$

Таким образом, проекция на критериальное пространство решений системы (1)–(6)–(7)–(13)–(14) (обозначим ее для удобства (*)) для всех $(\lambda^r)_{r \in R}$ является Парето-оптимальным множеством нашей мультирегиональной системы.

Задача поиска равновесия по своей сути является поиском на Парето-границе таких состояний, для которых выполнены соответствующие равновесные тождества.

Предлагается свести задачу поиска равновесий к задаче минимизации функционалов невязки равновесных тождеств как функций параметра $(\lambda^r)_{r \in R}$ на допустимом множестве (*), соответствующем всей Парето-границе. Зависимость данных функционалов от $(\lambda^r)_{r \in R}$ является неявной, т. е. выражения для функционалов невязки не содержат параметра λ , а только переменные системы (*). Переменные системы (*), в свою очередь, уже связаны с параметром $(\lambda^r)_{r \in R}$ через некоторые из ограничений.

Положим $F_1 = \sum_r (S^r)^2$ – квадрат длины вектора невязки тождества эквивалентного обмена;

$F_2 = \sum_r (S^r + \bar{S}_v^r - S_v^r - T^r - P_v^r)^2$ – то же самое для тождества равновесия в широком смысле;

$$F_3 = F_1 + F_2 = \sum_r \left((S^r)^2 + (S^r + \bar{S}_v^r - S_v^r - T^r - P_v^r)^2 \right) \text{ – для тождества сильного равновесия.}$$

Лемма 1. Если на оптимальном решении задачи

$$\begin{cases} F_i \rightarrow \min \\ (*) \\ 0 \leq \lambda^r \leq 1 \forall r \in R \quad (**) \\ \sum_{r \in R} \lambda^r = 1 \end{cases}$$

$F_i = 0$, то $\lambda_{\min}$ – состояние эквивалентного обмена (при $i = 1$), равновесие в широком смысле (при $i = 2$), сильное равновесие (при $i = 3$).

Доказательство данного утверждения очевидно. Следует лишь отметить, что функционалы F_i построены таким образом, чтобы их нулевое значение достигалось на равновесии со-

ответствующего типа. В силу корректности исходной задачи (1)–(6) данные функционалы непрерывны по λ и неотрицательны, единичный симплекс является компактом, а значит, задача (**) разрешима и $\min_{**} F_i \geq 0$. И если соответствующее равновесие существует, то $\min_{**} F_i = 0$. Случай $\min_{**} F_i > 0$ означает несуществование равновесия типа i в нашей системе регионов.

Оптимизационная постановка задачи поиска равновесных состояний позволяет унифицировать процесс их поиска. Вообще говоря, вне контекста равновесий в многорегиональных системах данный подход справедлив для произвольной задачи векторной линейной оптимизации. Он позволяет выделить из всей Парето-границы подмножество состояний, удовлетворяющих некоторой системе уравнений, сформулированной в терминах параметров, прямых и двойственных переменных исходной задачи оптимизации.

Задача (**) является задачей оптимизации неявной функции по параметру. Решить ее аналитически или хотя бы получить аналитическое выражение для градиента минимизируемой функции по параметрам представляется затруднительным.

Предлагается туннельный алгоритм поиска глобального экстремума функций F_i . Точку рекорда (локального экстремума) данной функции предлагается искать обычным релаксационным методом (задавать в точке поле возможных направлений по λ и двигаться в сторону наискорейшего спуска). Суть туннельного алгоритма состоит в том, чтобы после отыскания очередной точки λ локального минимума функции F_i ищется точка λ_* , удовлетворяющая условию $F_i(\lambda_*) < F_i(\lambda)$ и отличная от λ . Из нее, как из начальной точки, производится очередной локальный спуск.

Шаг k. Положим, $\lambda_k = (\lambda_k^r)_{r \in R}$ – точка локального минимума F_i . Определим туннельную (штрафную) функцию в виде

$$T(\lambda) = T(\lambda | \lambda_k, \alpha) := \frac{F_i(\lambda) - F_i(\lambda_k)}{\|\lambda - \lambda_k\|},$$

где α – параметр.

Начиная из точек вида $(\lambda_k^r \pm \delta)_{r \in R}$, где δ – некоторое малое число, последовательно применяем алгоритм локального спуска для минимизации туннельной функции до тех пор, пока не найдется хотя бы одна точка λ_k^* ее локального минимума. Вновь применяем метод локального спуска минимизации функционала F_i , начиная из точки λ_k^* . Получаем точку λ_k^{**} .

Возможны два случая:

- 1) $F_i(\lambda_k^{**}) \leq F_i(\lambda_k^*)$, $\lambda_k^{**} \neq \lambda_k^*$. Тогда переходим на следующий шаг, задав $\lambda_{k+1} = \lambda_k^{**}$;
- 2) $F_i(\lambda_k^{**}) > F_i(\lambda_k^*)$, $\lambda_k^{**} \neq \lambda_k^*$. Тогда:

а) если $k \leq K$, где K – некоторое фиксированное число, то увеличиваем значение параметра α и переходим на шаг $k+1$, задав $\lambda_{k+1} = \lambda_k$;

б) если $k > K$, то дальнейшие вычисления прекращаются. Точка λ_k является точкой глобального минимума функционала F_i и при нулевом значении минимума задает равновесие типа i в нашей межрегиональной системе.

Начальное приближение λ_0 получается методом локального спуска функционала F_i из некоторой произвольной точки единичного симплекса.

Данный алгоритм является конечным и сходящимся ввиду корректности задачи (**) и результатов теории оптимизации [8]. Но, к сожалению, этот алгоритм нельзя назвать эффективным по двум причинам. Во-первых, из-за отсутствия аналитического выражения для градиентов минимизируемых функций приходится на этапе локального спуска рассматривать все поле возможных направлений из начальной точки. Во-вторых, туннельная функция T

при разумных значениях параметра α является маломеняющейся и близкой к нулю в значительной части рассматриваемой области.

Но тем не менее полученный алгоритм был программно реализован и положительно протестирован серией экспериментальных расчетов, которые проводились на трехрегиональном (запад, центр, восток) пятиотраслевом модельном комплексе («Полигон»). Две отрасли являются транспортабельными (добыча, обработка). Внешняя торговля реализована двумя внешними рынками (западный и восточный). Топология системы предполагается линейчатой (рис. 2).



Рис. 2. Топология трехрегиональной системы условного примера

Были проведены расчеты по поиску состояния эквивалентного обмена и равновесия в широком смысле итерационными эвристическими алгоритмами, а также по поиску равновесий всех трех типов с помощью туннельного алгоритма. По результатам серии расчетов можно сделать следующие выводы.

1. Авторская модификация эвристического алгоритма для равновесия в широком смысле показала свою работоспособность и эффективность (как и в случае с эквивалентным обменом, сходимость к равновесию менее чем за 10 итераций).

2. Туннельный алгоритм работоспособен для равновесий всех типов, но проигрывает эвристическим алгоритмам в быстродействии. Тем не менее время расчета равновесий с помощью туннельного алгоритма является обозримым (около 3 минут на обычном ПК для 3 регионов и пяти отраслей).

3. Результаты работы эвристических алгоритмов и туннельного алгоритма для эквивалентного обмена и равновесия в широком смысле обмена полностью совпадают.

4. С помощью туннельного алгоритма удалось получить состояние сильного равновесия. Для этого пришлось некоторым образом модифицировать входные данные, поскольку на эталонном варианте входных данных такового не существовало ($\min F_3$). Ниже для наглядности приведена таблица макрофинансовых балансов во внутренних и мировых ценах (соответствуют двум равновесным тождествам) на рассчитанном сильном равновесии. Порядок невязки, отнесенной к общесистемному целевому функционалу в обоих случаях, равен не более $5 \cdot 10^{-3}$. Это свидетельствует о том, что рассчитанное состояние $\bar{\lambda} = (0,471; 0,334; 0,195)$ с хорошим приближением можно назвать сильным равновесием.

Таблицы макрофинансовых балансов на сильном равновесии

		Запад	Центр	Восток	Итого
Внутренние цены	Q^r	1647,277	1356,439	657,307	3661,023
	S^r	-7,281	-0,207	7,488	0
	S_v^r	6,641	39,106	-96,006	-50,259
	$\omega^r z^r$	1647,917	1317,54	745,825	3711,282
	Правая часть	1640,635	1317,333	753,313	3711,282
	Невязка	-7,281	-0,207	7,488	0
Мировые цены	Q^r	1647,277	1356,439	657,307	3661,023
	$\bar{S}_v^r$	0	-62,851	62,851	0
	Таможенные сборы	0	17,103	33,156	50,259
	$\omega^r z^r$	1647,917	1317,54	745,825	3711,282
	Левая часть	1647,917	1380,391	682,975	3711,282
	Правая часть	1647,277	1373,543	690,462	3711,282
	Невязка	-0,64	-6,846	7,488	0

Заключение

Результаты проведенного исследования можно резюмировать следующим образом. Основным теоретическим итогом стала формулировка и интерпретация новых математико-экономических конструкций, возникших именно в данной модификации модели:

- внешнеторговое тождество, согласно которому во всей системе в целом разность между сальдо внешней торговли во внутренних и мировых ценах (все во внутренней валюте) равно общим таможенным сборам (региональные аналоги такого тождества, вообще говоря, неверны);
- равновесие в широком смысле – неэквивалентность межрегионального обмена у всех регионов компенсируется невязкой регионального внешнеторгового тождества;
- сильное равновесие – имеет место эквивалентный межрегиональный обмен, а также выполнены все региональные аналоги внешнеторгового тождества.

Вторым значимым теоретическим результатом стала формулировка и обоснование оптимизационной постановки поиска равновесий всех указанных типов. В отличие от используемого ранее в прикладных исследованиях итерационного метода поиска состояния эквивалентного обмена сформулированный подход теоретически обоснован и позволяет унифицировать процесс поиска вальрасовских равновесий различных типов. Вторым достоинством данного подхода является универсальность, поскольку в отрыве от контекста равновесных состояний межрегиональных моделей он позволяет «фильтровать» Парето-оптимальные состояния некоторой произвольной линейной задачи векторной оптимизации по некоторой системе соотношений между оптимальными значениями переменных прямой и двойственной задачи.

Практическую ценность представляет разработанный и реализованный туннельный алгоритм решения оптимизационной постановки задачи поиска равновесий Вальраса всех трех типов для рассмотренной модификации межрегиональной модели. Данный алгоритм был положительно протестирован на малоразмерном условном примере экономики из трех регионов и пяти отраслей. Основным его недостатком по сравнению с итерационными эвристическими алгоритмами является быстроедействие.

В процессе исследования возникли задачи, которые дают перспективу дальнейших исследований в данной области:

- 1) теоретическое обоснование итерационных методов поиска состояний эквивалентного обмена и равновесия в широком смысле (тех, которые характеризуются выполнением для

каждого региона ровно одного условия-равенства). Эти алгоритмы на данный момент являются эвристическими, но несмотря на это показывают сходимость и эффективность при экспериментальных расчетах. К тому же вариант алгоритма для поиска эквивалентного обмена давно используется в прикладном равновесном анализе по более ранним модификациям ОМММ и очень хорошо себя зарекомендовал;

2) модификация алгоритмов из п. 1 на случай поиска состояний, характеризующихся выполнением для каждого региона не одного условия, а некоторой системы уравнений (таким состоянием является, к примеру, сильное равновесие);

3) проведение прикладного равновесного анализа экономики России в разрезе 10 регионов и 40 отраслей на полноразмерном варианте межрегиональной модели с использованием новых конструкций и методов.

Список литературы

1. Гамидов Т. Г., Доможиров Д. А., Ибрагимов Н. М. Равновесие Вальраса в модели взаимодействия регионов с условными центрами. Эквивалентность теоретического подхода и прикладного метода // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Социально-экономические науки. 2011. Т. 11, вып. 3. С. 12–26.
2. Васильев В. А., Суслов В. И. Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений // Сиб. журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 18–33.
3. Суслов В. И. Измерение эффектов межрегиональных взаимодействий: модели, методы, результаты / Отв. ред. А. Г. Гранберг; ИЭОПП СО АН СССР. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1991.
4. Суслов В. И. Равновесие в пространственных экономических системах // Сложные системы в экстремальных условиях: Тез. докл. XV Всерос. симпозиума с междунар. участием, 16–21 авг. 2010 г. / Под ред. Р. Г. Хлебопруса, И. И. Моргулиса, О. В. Круглика. Красноярск: Краснояр. науч. центр, СО РАН, Сиб. фед. ун-т, 2010. С. 68–69.
5. Рубинштейн А. Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука, 1983.
6. Rubinstein A. Perfect Equilibrium in a Bargaining Model // *Econometrica*. 1982. Vol. 50. P. 97–109.
7. Gembicki F. W. Vector Optimization for Control with Performance and Parameter Sensitivity Indices: Ph.D. Thesis. Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio, 1974.
8. Жигляевский А. А., Жилинских А. Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.

Материал поступил в редколлегию 05.04.2013

T. G. Gamidov, D. A. Domozhikov, N. M. Ibragimov

Equilibrium States of open interregional system based on Interregional intersectoral optimization model

Paper deals with complicated modification of the Interregional intersectoral optimization model that considers direct exchange relations and also decreasing efficiency of foreign trade. New types of Walrasian equilibria were given for this modification of the IIOM. Tunnel algorithm for minimization of Equilibrium equation's discrepancy was developed.

Keywords: Interregional intersectoral optimization model, Walrasian Equilibria, Vector optimization, Pareto-Frontier, Global optimization methods, Tunnel algorithm.