УДК 338.001.36 + 338.5.01

Н. П. Дементьев [1], Ю. А. Петров [2]

[1] Институт экономики
и организации промышленного производства СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: dement@ieie.nsc.ru

[2] Центральный экономико-математический институт РАН
Нахимовский пр., 47, Москва, 117418, Россия

E-mail: petrov@cemi.rssi.ru

МНОГОСТОРОННИЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ИНДЕКСЫ ЦЕН И КОЛИЧЕСТВ: ПОСТРОЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ МЕЖДУНАРОДНЫХ СОПОСТАВЛЕНИЙ

В работе развивается аксиоматический подход к теории многосторонних индексов цен и количеств. Предложена новая индексная формула (многосторонний симметричный индекс). Благодаря своим математическим свойствам симметричный индекс определен для полуположительных матриц выпусков продукции в натуральном выражении и выпусков в текущих ценах. Многосторонний симметричный индекс удовлетворяет аксиоме (тесту) циркулярности по определению и может использоваться в программах международных сопоставлений.

Ключевые слова: многосторонние индексы, индекс цен, индекс количеств, аксиоматический метод, теорема существования, международные сопоставления.

Задача построения согласованных индексов цен и количеств для многосторонних международных сопоставлений ВВП

Индексы (индексные формулы) цен и количеств (например векторов выпусков продукции по отраслям или валового внутреннего продукта по видам экономической деятельности (ВЭД)) – один из наиболее востребованных инструментов количественного анализа в экономических исследованиях. К числу важнейших сфер их применения относятся международные сопоставления ВВП. Его результатами являются паритеты покупательной способности (ППС) разных валют и взаимосвязанные с ними расчетные величины физических объемов ВВП (ФОВВП) по странам. С формальной точки зрения задача нахождения ППС и ФОВВП является частным случаем задачи построения многосторонних (*multilateral*) индексов [1] цен и количеств. Сформулируем в кратком виде эту задачу.

Введем обозначения для заданных величин:

$J = \{1,\ 2, ..., n\}$ – множество ВЭД или видов товаров;

$R = \{1,\ 2, ..., T\}$ – множество объектов (лет, стран);

$Q = \{Q_1,\ Q_2, ..., Q_T\}$, где $Q_t = (q_{t1}, q_{t2}, ..., q_{tn})$ – вектор выпуска продукции в натуральном выражении в объекте t;

[1] В работе [1] использовался термин «многомерные индексы», который авторы считают более общим, так как не совсем понятно, что понимать под «стороной» в случае соизмерения уровней цен и количеств в одной стране, но в разные периоды времени.

$C = \{C_1,\ C_2, ..., C_T\}$, где $C_t = (c_{t1}, c_{t2}, ..., c_{tn})$ – вектор выпуска продукции в текущих ценах, выраженных в соответствующей валюте в объекте t.

Предполагается, что матрицы Q и C удовлетворяют следующим предположениям:

- $q_{tj} = 0$ тогда и только тогда, когда
$$C_{tj} = 0; \tag{1}$$
- $$\sum_{t=1}^{T} q_{tj} > 0, \quad j = 1, ..., n; \tag{2}$$
- $$\sum_{j \in J} q_{tj} > 0, \quad t = 1, ..., T. \tag{3}$$

Кроме того, предполагается неразложимость матрицы Q, а именно: не существует непустых множеств $\hat{J} \subset J$, $\hat{T} \subset \{1, ..., T\}$ таких, что
$$q_{tj} = 0, \text{ если } j \in \hat{J}, \quad t \in \hat{T};\ q_{tj} = 0, \text{ если } j \notin \hat{J}, \quad t \notin \hat{T}. \tag{4}$$

Определим производные величины:

$P = \{P_1,\ P_2, ..., P_T\}$, где $P_t = (p_{t1}, p_{t2}, ..., p_{tn})$ – вектор цен в объекте t [2], $p_{ti} = c_{ti} / q_{ti}$.

Средние (по объектам) доли продуктов i: $v_i = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} c_{ti} / \sum_{j=1}^{n} c_{tj}$, $i = 1, ..., n$.

Требуется найти положительные векторы индексов количеств $I_{11}, I_{21}, ..., I_{T1}$ и индексов цен $R_{11}, R_{21}, ..., R_{T1}$, удовлетворяющие общепризнанным аксиомам или тестам (см., например, [2–6]). В работах [1; 7] приведен набор из 10 аксиом в варианте для многомерных индексов. В частности, из аксиомы произведения индексов цен и количеств следует, что
$$I_{t1} \times R_{t1} = G_{t1},\ t = 1, ..., T, \text{ где } G_{t\tau} = \sum_{i=1}^{n} c_{ti} / \sum_{i=1}^{n} c_{\tau i},\ t,\ \tau = 1, ..., T. \tag{5}$$

Назовем $G_{t\tau}$ индексом стоимостного объема (ИСО) в объекте t относительно объекта τ.

Все известные индексные формулы можно разделить на две группы. К первой следует отнести индексы количеств в сопоставимых ценах $I_{t\tau} = SQ_t / SQ_t$, $t, \tau = 1, ..., T$. Здесь $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$ – вектор измерителей или сопоставимых цен. Их наличие в качестве результатов сравнений объектов позволяет вычислять количества в сопоставимых ценах и производные от них величины (векторы структур выпуска и т. п.). Индексы цен при этом определяются из условия (5). По мнению авторов, если есть возможность построения таких согласованных индексов цен и количеств, построение каких-либо иных индексов, не имеющих ясной экономической интерпретации, не имеет смысла.

Работы по теории многосторонних индексов, используемых для международных сопоставлений ВВП, как правило, относятся ко второй группе. В них строятся различные формулы для индексов цен и сравниваются свойства последних по тем или иным соображениям [3]. На практике в основном используется индекс Элтето – Кевеша – Шульца (ЭКШ) [10; 11], по сути являющийся обобщением на многосторонний случай идеального индекса Фишера [12]. Индекс ЭКШ не является индексом в сопоставимых ценах.

В настоящей статье предлагается простой метод построения многостороннего индекса, предложенного Ю. А. Петровым [7; 13]. Он назван симметричным, так как не зависит от того, какой объект выбирается в качестве базового.

Основная идея метода такова: нужно так задать вектор измерителей S, чтобы получаемые на его основе показатели структуры $D_t = (d_{t1},\ d_{t2}, ..., d_{tn})$, где $d_{ti} = s_i q_{ti} / SQ_t$, т. е. расчетные векторы удельных весов, являющиеся вектор-функциями выпусков Q и измерите-

---

[2] Очевидно, что при отсутствии выпуска продукта i в объекте t соответствующая цена не определена. Поэтому мы в дальнейшем изложении постараемся обойтись без использования матрицы P.

[3] См., например, [8; 9].

лей S, были бы в сумме (по всем объектам) равны фактическим векторам структуры $V_t = (v_{t1}, v_{t2}, ..., v_{tn})$:

$$Tv_i = \sum_{t=1}^{T} s_i q_{ti} / SQ_t, \qquad i = 1, ..., n, \text{ или}$$

$$s_i = Tv_i / \sum_{t=1}^{T} q_{ti} / SQ_t, \qquad i = 1, ..., n. \tag{6}$$

Поскольку решение s системы (6) определяется с точностью до общего множителя, то, не ограничивая общности, можно считать, что $SQ_1 = 1$. В этом случае величины $SQ_t = SQ_t / SQ_1 = I_{t1}$ истолковываются как индексы количеств в объектах t относительно первого объекта. Тогда, сделав замену переменных $SQ_t = I_{t1}$, $t = 1,...,T$, уравнения (6) можно переписать в виде

$$s_i = Tv_i / \sum_{t=1}^{T} q_{ti} / I_{t1}, \qquad i = 1,...,n. \tag{7}$$

Произведя подстановку (7) в равенства $I_{t1} = SQ_t / SQ_1$, $t = 1,...,T$, получим систему уравнений для определения индексов I_{t1}:

$$I_{t1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_{tj} v_j / \sum_{\tau=1}^{T} q_{\tau j} / I_{\tau 1}}{\sum_{j=1}^{n} q_{1j} v_j / \sum_{\tau=1}^{T} q_{\tau j} / I_{\tau 1}}, \; I_{t1} > 0, \; t = 1,...,T. \tag{8}$$

$$I_{t1} > 0, \; t = 1,...,T. \tag{9}$$

Заметим, что в решении системы (8)–(9) равенство $I_{11} = 1$ выполняется автоматически.

Теорема существования и единственности системы уравнений для многомерных индексов

Теорема. Пусть выполнены предположения (1)–(4). Тогда система (8)–(9) разрешима и имеет единственное решение.

В основе доказательства теоремы лежит

Лемма. Рассмотрим функцию

$$F(S) = \prod_{t=1}^{T} \sum_{j=n}^{n} s_j / \left(\prod_{j=1}^{n} s_j^{Tv_j} \right).$$

Тогда при предположениях (1)–(4) функция $F(S)$ достигает минимума на множестве $S_0 = \left\{ S > 0 : \sum_{j=1}^{n} s_j = 1 \right\}$.

Доказательство леммы. Пусть от противного F не достигает минимума на S_0. Тогда можно выбрать минимизирующую последовательность S^k, $k = 1, 2, ...,$ сходящуюся к некоторой точке $\overline{S} \in R_+^n$. Ясно, что некоторые координаты точки $\overline{S}$ равны нулю. Пусть m – число ее положительных координат, $0 < m < n$. Путем перенумерования продуктов можно добиться того, что $\overline{s}_1 \geq \overline{s}_2 \geq ... \geq \overline{s}_m > 0$, $\overline{s}_{m+1} = \overline{s}_{m+2} = ... = \overline{s}_n = 0$. Для дальнейших выкладок удобно перенумеровать определенным способом и продукты с номерами $m+1, ..., n$. Эта процедура состоит из $n-m$ шагов.

1-й шаг. Продукт $m+1$ сохраняет свой индекс.

2-й шаг. Рассмотрим продукт с номером $m+2$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lim_{k \to \infty} \overline{s}_{m+1}^k / \overline{s}_{m+2}^k$ существует и находится в интервале $[0, \infty]$. Если предел больше или равен 1, то продукты $m+1$, $m+2$ сохраняют свои номера, в противном случае они меняются номерами друг с другом. Ясно, что после второго шага выполнено следующее свойство: $\lim_{k\to\infty}\overline{s}_i^k/\overline{s}_j^k \ge 1$ при $1 \le i \le j \le m+2$, причем $\lim_{k\to\infty}\overline{s}_m^k/\overline{s}_{m+1}^k = \infty$.

Предположим, что после l шагов выполнено свойство $\lim_{k\to\infty}\overline{s}_i^k/\overline{s}_j^k \ge 1$ при $1 \le i \le j \le m+l$, причем $\lim_{k\to\infty}\overline{s}_m^k/\overline{s}_{m+1}^k = \infty$.

$(l+1)$-й шаг. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lim_{k\to\infty}\overline{s}_i^k/\overline{s}_{m+l+1}^k$ существует для $i = 1, ..., m+l$. Тогда найдется номер $i_0 \in \{m+1, ..., m+l\}$ такой, что $\lim_{k\to\infty}\overline{s}_i^k/\overline{s}_{m+l+1}^k$ больше единицы при $i = 1, ..., i_0$ и меньше единицы при $i = i_0+1, ..., m+l$. Тогда перенумерация продуктов на $(l+1)$-м шаге сводится к следующему: за продуктами $i = 1, ..., i_0$ сохраняются их номера, продукт $m+l+1$ получает номер i_0+1, а номера продуктов $i_0+1, ..., m+l$ (если $i_0 < m+l$) увеличиваются на единицу.

Ясно, что после $(n-m)$-го шага нумерация продуктов окажется такой, что $\lim_{k\to\infty}\overline{s}_i^k/\overline{s}_j^k \ge 1$ при $1 \le i \le j \le n$, причем $\lim_{k\to\infty}\overline{s}_m^k/\overline{s}_{m+1}^k = \infty$.

Последовательность удовлетворяет следующему свойству:

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left(s_j^k\right)^{\alpha_j-\beta_j} = \infty \tag{10}$$

для всех $\alpha_j \ge 0, \beta_j \ge 0$ таких, что $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n}\beta_j$, $\sum_{j=1}^{l}\alpha_j > \sum_{j=1}^{l}\beta_j$ при $l = 1, ... n-1$.

Докажем (10) индукцией по $r = n-m$. При $r = 1$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left(s_j^k\right)^{\alpha_k-\beta_\kappa} = \prod_{j=1}^{n-1}\left(\overline{s}_j^k\right)^{\alpha_k-\beta_\kappa}\lim_{k\to\infty}\left(s_n^k\right)^{\alpha_n-\beta_n} = \infty,$$

так как $s_n^k \to 0$ при $k \to \infty$; $\quad \alpha_n - \beta_n < 0$; $\quad \overline{s}_j > 0$, $\quad j = 1, ..., m$, $\quad m = n-1$.

Пусть (10) установлено при $r \le r_0$. Покажем его справедливость при $r = r_0+1$. Имеем

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left(s_j^k\right)^{\alpha_k-\beta_\kappa} = \lim_{k\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\left(s_j^k\right)^{\alpha_k-\delta_\kappa}\left(s_{n-1}^k/s_n^k\right)^{\beta_n-\alpha_n}\right) \ge \lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{n-1}\left(s_j^k\right)^{\alpha_k-\delta_\kappa}, \tag{11}$$

где $\delta_1 = \beta_1$, …, $\delta_{n-2} = \beta_{n-2}$, $\delta_{n-1} = \beta_{n-1} + \beta_n - \alpha_n$. Неравенство в (11) следует из того, что $\lim_{k\to\infty}s_{n-1}^k/s_n^k \ge 1$ и $\beta_n - \alpha_n > 0$. Так как $\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n-1}\delta_j$, то из индукционного предположения $\left(n-1-m = r_0\right)$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{n-1}\left(s_j^k\right)^{\alpha_j-\delta_j} = \infty.$$

Отсюда и из (11) следует справедливость (10) при $r = r_0+1$. Итак, свойство (10) доказано.

Далее доказательство леммы состоит из конечного числа шагов, число которых не превышает n.

1-й шаг. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Все числа $q_{11}, q_{21}, ..., q_{T1}$ строго положительны. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}F\left(S^k\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{\prod_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}s_j^k q_{tj}}{\prod_{j=1}^{n}\left(s_j^k\right)^{Tv_j}} \ge \lim_{k\to\infty}\frac{\prod_{t=1}^{T}s_1^k q_{t1}}{\prod_{j=1}^{n}\left(s_j^k\right)^{Tv_j}} = \prod_{t=1}^{T}q_{t1}\frac{\left(s_1^k\right)^T\left(s_2^k\right)^0...\left(s_n^k\right)^0}{\prod_{j=1}^{n}\left(s_j^k\right)^{Tv_j}} = \infty$$

согласно (10), где $\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) = \left(T, 0, ..., 0\right)$, $\left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right) = \left(Tv_1, Tv_2, ..., Tv_n\right)$.

Получено противоречие, поскольку минимизирующая последовательность не может стремиться к ∞. Итак, в случае 1 лемма доказана.

Случай 2. Некоторые q_{t1} равны нулю. Обозначим через R_1 множество индексов t, таких что $q_{t1} > 0$. Пусть T_1 – число таких индексов. Покажем, что $T_1 > Tv_1$, или, то же самое, $T - T_1 < T\sum_{j=2}^{n} v_j$.

Действительно,

$$\sum_{j=2}^{n} Tv_j = \sum_{j=2}^{n}\sum_{t=1}^{T} w_{tj} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{t\notin R_1} w_{tj} + \sum_{j=2}^{n}\sum_{t\in R_1} w_{tj} > T - T_1 .$$

Неравенство в этой цепочке соотношений следует из следующих соображений. Во-первых, из $q_{t1} = 0$, $t \notin R_1$, следует, что $w_{t1} = 0$, $t \notin R_1$. Тогда $\sum_{j=2}^{n} w_{tj} = 1$, $t \notin R_1$, и, следовательно,

$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{t\notin R_1} w_{tj} = \sum_{t\notin R_1}\sum_{j=2}^{n} w_{tj} = T - T_1 .$$

Во-вторых, $\sum_{j=2}^{n}\sum_{t\in R_1} w_{tj} > 0$. Действительно, из $\sum_{j=2}^{n}\sum_{t\in R_1} w_{tj} = 0$ следует, что $w_{tj} = 0$, $q_{tj} = 0$, $j = 2,...,n$, $t \in R_1$. Отсюда вытекает разложимость матрицы Q ($q_{tj} = 0$, $j = 1$, $t \in \backslash R_1$; $q_{tj} = 0$, $j \neq 1$, $t \in R_1$). Это противоречит предположению (4). Итак, $\sum_{j=2}^{n}\sum_{t\in R_1} w_{tj} > 0$, $\sum_{j=2}^{n}\sum_{t\notin R_1} w_{tj} = T - T_1$, $\sum_{j=2}^{n} Tv_j > T - T_1$.

Первый шаг завершен.

Предположим, что доказательство леммы не завершилось на p-м шаге. Примем как индукционное предположение, что после p-го шага сформированы множества индексов R_1, R_2, ..., R_p, обладающие следующими свойствами:

$$1)\ R_i = \left\{ t \in R \backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} R_j \,\middle|\, q_{ti} > 0 \right\},\ \bigcup_{j=1}^{P} R_j \neq R;$$

$$2)\ \sum_{j=1}^{l} T_j > \sum_{j=1}^{l} Tv_j,\ \ l = 1,\ 2, ...,\ p,$$

где T_j – число элементов в множестве R_j.

Отметим, что некоторые множества R_j могут быть пустыми. Из 1) прямо следует, что $R_j \bigcap R_l = \varnothing$ при $j \neq l$.

$(p+1)$-й шаг. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Все числа $q_{t,p+1}$, $t \in R \backslash \bigcup_{j=1}^{p} R_j$, строго положительны. Положим $R_{p+1} = R \backslash \bigcup_{j=1}^{p} R_j$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} F\left(S^k\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\prod_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n} s_j^k q_{tj}}{\prod_{j=1}^{n}\left(s_j^k\right)^{Tv_j}} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p+1}\prod_{t\in R_j} s_j^k q_{tj}}{\prod_{j=1}^{n}\left(s_j^k\right)^{Tv_j}} = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{p+1}\prod_{t\in R_j} q_{tj} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{p+1}\left(s_j^k\right)^{T_j}}{\prod_{j=1}^{n}\left(s_j^k\right)^{Tv_j}}.$$

Обозначим: $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=(T_1,T_2,...,T_{p+1},0,...,0)$, $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)=(Tv_1,Tv_2,...,Tv_n)$. Из индукционного предположения 2) и равенства $\sum_{j=1}^{p+1}T_j=T$ вытекает, что $\sum_{j=1}^{l}\alpha_j>\sum_{j=1}^{l}\beta_j$ для $l=1,...,n-1$. Согласно соотношению (10) имеем

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{p+1}\left(s_j^k\right)^{T_j}/\prod_{j=1}^{n}\left(s_j^k\right)^{Tv_j}=\infty .$$

Итак, в случае 1 имеем $F(S^k)\to\infty$ при $k\to\infty$. Из полученного противоречия следует справедливость леммы.

Случай 2. Не все числа $q_{t,p+1}$, $t\in R\setminus\bigcup_{j=1}^{p}R_j$ строго положительны. Обозначим $R_{p+1}=\left\{t\in R\setminus\bigcup_{j=1}^{p}R_j:q_{t,p+1}>0\right\}$. Ясно, что множества $R_1,...,R_{p+1}$ удовлетворяют свойствам 1). Покажем, что $\sum_{j=1}^{p+1}T_j>\sum_{j=1}^{p+1}Tv_j$ или $T-\sum_{j=1}^{p+1}T_j<\sum_{j=p+2}^{n}Tv_j$. Имеем

$$\sum_{j=p+2}^{n}Tv_j=\sum_{j=p+2}^{n}\sum_{t=1}^{T}w_{tj}=\sum_{j=p+2}^{n}\sum_{t\notin\Omega_{p+1}}w_{tj}+\sum_{j=p+2}^{n}\sum_{t\in\Omega_{p+1}}w_{tj}>T-\sum_{j=1}^{p+1}T_j ,$$

где $\Omega_{p+1}=\bigcup_{l=1}^{p+1}R_l$. Неравенство следует из следующих соображений.

Во-первых, из $q_{tj}=0,\ j=1,...,p+1,\ t\notin\Omega_{p+1}$, следует, что $w_{tj}=0$. Тогда $\sum_{j=p+2}^{n}w_{tj}=1$ при $t\notin\Omega_{p+1}$ и, следовательно, $\sum_{j=p+2}^{n}\sum_{t\notin\Omega_{p+1}}w_{tj}=T-\sum_{j=1}^{p+1}T_j$.

Во-вторых, $\sum_{j=p+2}^{n}\sum_{t\in\Omega_{p+1}}w_{tj}>0$. Действительно, из $\sum_{j=p+2}^{n}\sum_{t\in\Omega_{p+1}}w_{tj}=0$ следует, что $w_{tj}=0,\ q_{tj}=0,\ j=p+2,...,n,\ t\in\Omega_{p+1}$. Отсюда вытекает разложимость матрицы Q ($q_{tj}=0,\ j=1,...,p+1,\ t\notin\Omega_{p+1}$; $q_{tj}=0,\ j=p+2,...,n,\ t\notin\Omega_{p+1}$). Получено противоречие. Следовательно, $\sum_{j=p+2}^{n}\sum_{t\in\Omega_{p+1}}w_{tj}>0$ и $\sum_{j=1}^{p+1}T_j>\sum_{j=1}^{p+1}Tv_j$. $p+1$-й шаг завершен.

Предположим, что доказательство леммы не завершилось на шагах $1,2,...,n-1$. Тогда на n-м шаге должен иметь место случай 1 (иначе в матрице Q должны существовать нулевые столбцы). Но случай 1 на любом шаге завершает доказательство леммы.

Лемма доказана.

Итак, $F(S)$ достигает минимума на S_0. Тогда в этой точке достигает минимума и функция $\ln F(S)=\sum_{t=1}^{T}\ln\left(\sum_{j=1}^{n}s_jq_{tj}\right)-\sum_{j=1}^{n}Tv_j\ln s_j$. Беря частные производные этой функции и приравнивая их нулю, получим равенства (8). Тем самым система (8) имеет строго положительное решение.

Единственность решения. Пусть существуют два решения $S'>0$ и $S''>0$:

$$s_i'=Tv_i/\sum_{t=1}^{T}\frac{q_{ti}}{\sum_{j=1}^{n}s_j'q_{tj}},\quad s_i''=Tv_i/\sum_{t=1}^{T}\frac{q_{ti}}{\sum_{j=1}^{n}s_j''q_{tj}},\quad i=1,...,n; \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n}s_i'=1,\qquad \sum_{i=1}^{n}s_i''=1 .$$

Положим $\sigma = \min_i s'_i / s''_i$. Пусть минимум достигается на i_0. Тогда

$$S' = \sigma S'' + \overline{S} > 0,\ \overline{S} \geq 0,\ \overline{S} \neq 0,\ \overline{s}_{i_0} = s'_{i_0} - \sigma s''_{i_0} = 0 .$$

Вторая группа равенств из (12) эквивалентна

$$\sigma s''_i = T v_i \Big/ \sum_{t=1}^{T} \frac{q_{ti}}{\sum_{j=1}^{n} \sigma s''_j q_{tj}},\ i = 1, ..., n . \tag{13}$$

Из (12)–(13) следует

$$s'_{i_0} - \sigma s''_{i_0} = T v_{i_0} \Big/ \sum_{t=1}^{T} \frac{q_{ti_0}}{\sum_{j=1}^{n} \sigma s'_j q_{tj}} - T v_{i_0} \Big/ \sum_{t=1}^{T} \frac{q_{ti_0}}{\sum_{j=1}^{n} \sigma s''_j q_{tj}} . \tag{14}$$

Левая часть (14) равна нулю. Покажем, что правая часть строго положительна. Заметим, что $\sum_{j=1}^{n} \overline{s}_j q_{tj} > 0$ хотя бы для одного t. Тогда

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{q_{ti_0}}{\sum_{j=1}^{n} s'_j q_{tj}} = \sum_{t=1}^{T} \frac{q_{ti_0}}{\sum_{j=1}^{n} \left(\sigma s'_j + \overline{s}_j\right) q_{tj}} < \sum_{t=1}^{T} \frac{q_{ti_0}}{\sum_{j=1}^{n} \sigma s''_j q_{tj}} .$$

Отсюда прямо следует положительность правой части (14). Получено противоречие, поэтому предположение о неединственности решения неверно. Один из алгоритмов нахождения решения (8)–(9) может состоять в максимизации функции F на S_0. Эта функция имеет единственный локальный минимум, совпадающий с глобальным (иначе решение системы (8)–(9) было бы неединственным). Точка минимума и будет решением (8)–(9).

При расчете индексов на основе реальной информации мы использовали итеративную процедуру:

$$I_{t1}^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_{tj} v_j \Big/ \sum_{\tau=1}^{T} q_{\tau j} / (I_{\tau 1}^k / I_{11}^k)}{\sum_{j=1}^{n} q_{1j} v_j \Big/ \sum_{\tau=1}^{T} q_{\tau j} / (I_{\tau 1}^k / I_{11}^k)},\ t = 1, ..., T;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,$$

где $I_{11}^0 = 1,\ I_{21}^0 > 0, ..., I_{T1}^0 > 0$ – некоторые заданные положительные числа. Как показали расчеты, итеративный процесс быстро сходится, хотя теоретически его сходимость нами не установлена. Получаемая стационарная точка $I_{11}^*, I_{21}^*, ..., I_{T1}^*$ и есть искомое решение системы (8)–(9). Индексы цен $R_{11}*, R_{21}*, ..., R_{T1}*$ определяются однозначно из условия (5).

* * *

Формула парного (двустороннего) симметричного индекса [13] выглядит значительно сложнее, чем обычно используемые арифметический и гармонический индексы. Однако уже формула «идеального» индекса Фишера (среднее геометрическое из арифметического и гармонического индексов) не менее громоздка, чем формула симметричного. А в многосторонних сопоставлениях используется индекс ЭКШ, являющийся средней геометрической величиной из парных «идеальных» индексов Фишера, определяемых для данной страны в отношении всех других стран. У индекса ЭКШ нет никакой естественной экономической интерпретации. Он сконструирован исключительно с целью получения индекса, удовлетворяющего тесту циркулярности. Многосторонний симметричней индекс гораздо проще индекса ЭКШ. Но главное его преимущество – очевидная экономическая интерпретация. Этот векторный индекс представляет собой систему парных индексов всех объектов совокупности к выбранному в качестве эталона объекту. Индекс количеств при этом есть аддитивный индекс, рассчитываемый в сопоставимых ценах *S*, которые по существу представляют собой средние по всем объектам цены, нормированные на индексы цен. Это позволяет использовать получаемые векторы S для расчета структуры производства и других обычных задач экономического анализа при проведении международных сопоставлений.

Список литературы

1. *Дементьев Н. П., Петров Ю. А.* Многомерные экономические индексы и их использование в стратегическом планировании // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Социально-экономические науки. 2003. Т. 3, вып. 1. С. 24–37.

2. *Аллен Р.* Экономические индексы. М.: Статистика, 1980. 256 с.

3. *Иванов Н.* Обзор аксиоматической теории индексов // Вопросы статистики. 1995. № 10. С. 25–39.

4. *Казинец Л. С.* Теория индексов. М.: Госстатиздат, 1963. 343 с.

5. *Eichhorn W.* Fisher's Tests Revisited // Econometrica. 1976. Vol. 44, № 2. P. 247–256.

6. *Eichhorn W., Voeller J.* Theory of the Price Index: Fisher's Test Approach and Generalisations. Berlin: Springer Verl., 1978. 95 p.

7. *Петров Ю. А.* Многомерные экономические индексы: аксиомы, построение и использование для измерения динамики промышленного производства в России в 1977–1997 годах. М.: ЦЭМИ РАН, 1999. Препринт # WP/99/068/. 82 с.

8. *Dikhanov Y.* Sensitivity of PPP-Based Income Estimates to Choice of Aggregation Procedures. The World Bank, 1997. 22 p.

9. *Hajargasht Gholamreza, Rao D. S. Prasada*. Systems of Index Numbers for International Price Comparisons Based on the Stochastic Approach. Centre for Efficiency and Productivity Analysis. School of Economics. University of Queensland. Brisbane, Australia, 2008. 29 p.

10. Global Purchasing Power: Parities and Real Expenditures (2005 International Comparison Program). Washington, D. C.: The World Bank, 2008. 213 p.

11. *Кевеш П.* Теория индексов и практика экономического анализа. М.: Финансы и статистика, 1990. 303 с.

12. *Фишер И.* Построение индексов: Учение об их разновидностях, тестах и достоверности. М.: ЦСУ СССР, 1928. 466 с.

13. *Петров Ю. А*. Измерение экономического роста и динамики структуры производства (на примере экономики США) // Технический прогресс и структурные сдвиги в экономике. Новосибирск: ИЭ и ОПП СО АН СССР, 1987. С. 80–98.

Материал поступил в редколлегию 01.07.2013

N. P. Dementiev, **Yu. A. Petrov**

MULTILATERAL SYMMRETRICAL INDICES OF PRICES AND QUANTITIES: MAKINGG & APPLICATION FOR INTERNATIONAL COMPARISONS

The axiomatic theory of multilateral indices of prices and quantities is developed. The new index formula (Multilateral Symmetrical Index) is proposed. Due to it's mathematical features Multilateral Symmetrical Index is definable for semipositive matrices of industrial outputs in natural units and outputs in current prices. Multilateral Symmetrical index meets the Circle Axiom (Test) by definition and is applicable for International Comparisons.

Keywords: multilateral indices, price index, quantity index, axiomatic method, existence theorem, international comparisons.