

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Временная структура процентных ставок оценивается и прогнозируется с использованием модели Нельсона – Сигеля с изменяющимися коэффициентами и стохастической волатильностью в ошибке. Исследуется возможность применения метода Лапласа для осуществления фильтрации в возникающей нелинейной модели пространства состояний. С помощью предлагаемого алгоритма были получены хорошие оценки и прогнозы для кривых доходности и цен облигаций.

*Ключевые слова:* кривая доходности, государственные облигации, модель Нельсона – Сигеля, модель пространства состояний, метод Лапласа.

Одним из важнейших показателей, характеризующих поведение и развитие финансовых рынков и экономики в целом, является временная (срочная) структура процентных ставок. Она представляет собой совокупность упорядоченных по сроку заимствования (сроку до погашения основного долга) значений процентных ставок, сложившихся на рынке в определенный момент. Таким образом, временная структура процентных ставок служит индикатором рыночной стоимости заимствования денежных средств на различные временные горизонты в определенный момент времени, а динамика этой кривой отражает изменения рыночных ставок во времени в целом.

Применение кривой процентных ставок можно разделить на две основные сферы: определение оптимального поведения на рынке и управление рыночными рисками (в том числе совершенствование методик его оценки).

Отражением временной структуры процентных ставок является кривая бескупонной доходности. Существует несколько различных типов моделей кривой доходности (подробнее об этом см., например: [1; 2]), однако наиболее часто при оценивании используются эмпирические модели кривой доходности, во многих случаях дающие более точные результаты при относительно меньших вычислениях и доступности всех необходимых данных.

Базовой среди эмпирических моделей считается модель Нельсона – Сигеля [3], в которой непрерывная процентная ставка определяется в зависимости от срока до погашения  $m$  по формуле

$$R(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right) \right] \frac{\tau}{m} - \beta_2 \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right), \quad (1)$$

где коэффициент  $\beta_0$  является долгосрочным вкладом в процентную ставку,  $\beta_2$  – среднесрочным вкладом,  $\beta_1$  – вкладом краткосрочной компоненты, а параметр  $\tau$  отвечает за скорость затухания экспонент.

Полученная процентная ставка используется для дисконтирования купонных выплат в расчетной цене облигации  $P$ :

$$P = \sum_{i=1}^n C_i e^{-R(m_i)m_i},$$

где  $C_i$  – размер  $i$ -го платежа;  $m_i$  – срок до погашения  $i$ -й выплаты;  $n$  – количество выплат, оставшихся до погашения облигации.

Развитием модели Нельсона – Сигеля, широко применяемым в исследованиях, являются ее динамические варианты, в которых предполагается, что коэффициенты кривой доходности изменяются во времени в соответствии с каким-либо процессом, например, как предполагается в данной работе, в соответствии с процессом авторегрессии первого порядка, что соответствует следующим выражениям:

$$y_t = \sum_{i=1}^n C_i e^{-R_t(m_i)m_i} + \xi_t, \\ \beta_{jt} = \gamma_j + \phi_j \beta_{j,t-1} + \eta_{jt}, \quad (2)$$

где  $j = \overline{0, 2}$ ,  $\eta_{jt} \sim N(0; \sigma_j^2)$ .

В приведенных формулах  $y_t$  обозначает модельную цену облигации в момент времени  $t$ ; ставка  $R_t(m_i)$  определяется по аналогии с формулой (1). Таким образом, динамика коэффициентов модели порождает динамику процентной кривой в целом.

Еще одно расширение, которое следует ввести в модель, – учет кластеризации волатильности (чередования периодов с высокой и низкой волатильностью), которая часто характеризует финансовые рынки [4]. Для учета влияния волатильности рынка в ошибку модели была добавлена авторегрессионная стохастическая волатильность:

$$\xi_t = e^{h_t/2} \varepsilon_t, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_t \sim N(0; 1)$ ,

$$h_t = \gamma_h + \phi_h h_{t-1} + \eta_t, \quad (4)$$

где  $\eta_t \sim N(0; \sigma_h^2)$ .

Полученную постановку модели удобно рассматривать в форме моделей пространства состояний<sup>1</sup>. В таких моделях предполагается, что в основе динамики наблюдаемых данных (в нашем случае цен облигаций) лежит динамика некоторых ненаблюдаемых переменных, называемых переменными состояния (в нашем случае ими являются динамические коэффициенты модели ( $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ) и коэффициент  $h_t$ , отвечающий за стохастическую волатильность).

Модель пространства состояний задается двумя уравнениями: уравнением измерения и уравнением перехода. Уравнение перехода определяется в соответствии с процессами, по которым изменяются ненаблюдаемые коэффициенты модели, и в рассматриваемом случае является линейным:

$$a_t = R_t^a + R_t^{aa} a_{t-1} + \varepsilon_t^a,$$

где вектор  $a_t = (\beta_{0t} \ \beta_{1t} \ \beta_{2t} \ h_t)^T$  – ненаблюдаемые коэффициенты модели;

$$\varepsilon_t^a = (\eta_{0t} \ \eta_{1t} \ \eta_{2t} \ \eta_t)^T \sim N(0, \Omega_t^a);$$

матрицы  $R_t^a$ ,  $R_t^{aa}$  и  $\Omega_t^a$  в соответствии с выражениями (2) и (4) имеют следующий вид:

$$R_t^a = (\gamma_0 \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_h)^T, \\ R_t^{aa} = \begin{pmatrix} \phi_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_h \end{pmatrix}, \quad \Omega_t^a = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_h^2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение измерения в рассматриваемом случае представляет собой выражение для цены облигации и в результате включения стохастической волатильности в ошибку модели является нелинейным по своим коэффициентам:

<sup>1</sup> Подробнее о моделировании в пространстве состояний можно прочитать, например, в [5].

$$y_t = \sum_{i=1}^n C_i e^{-R_t(m_i)m_i} + e^{h_t/2} \varepsilon_t.$$

Важным преимуществом моделей пространства состояний является возможность использования вектора наблюдаемых данных переменной размерности (т. е. размерность вектора  $y_t$  может различаться для различных моментов времени; однако размерность  $a_t$  при этом постоянна). Такое свойство оказывается очень удобным при использовании цен активов, торгуемых на финансовых рынках, поскольку в зависимости от того, с какими именно финансовыми инструментами совершались торги в каждый момент времени, может изменяться не только размерность вектора  $y_t$ , но и набор входящих в него элементов. Проблема пропущенных наблюдений (из-за отсутствия торгов, окончания срока обращения облигации и т. п.) при выборе такой постановки модели не возникает.

Одним из способов моделирования в пространстве состояний является фильтр Калмана [5]. Однако нелинейность рассматриваемой модели (в результате нелинейной формы уравнения измерения) приводит к невозможности использования этого фильтра и требует применения специальных алгоритмов.

Основная трудность заключается в том, что максимизируемая функция в явном виде неизвестна. Однако, используя метод Лапласа, можно аппроксимировать функцию правдоподобия и получить алгоритм фильтрации, позволяющий рекуррентно вычислять оценки ненаблюдаемых переменных и, таким образом, представляющий собой замену фильтру Калмана. Полученный алгоритм представлен следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} a_{t|t-1} &= R_t^a + R_t^{aa} a_{t-1|t-1}, \\ V_{t|t-1} &= R_t^{aa} V_{t-1|t-1} (R_t^{aa})^T + \Omega_t^a, \\ V_{t|t} &= (V_{t|t-1}^{-1} + b_t b_t^T)^{-1}. \end{aligned}$$

На каждом шаге из приближения  $a'_t$  получать приближение  $a''_t$  позволяет выражение

$$a''_t = a'_t + V_{t|t} \left[ \tilde{s}_t(a'_t) - V_{t|t-1}^{-1} (a'_t - a_{t|t-1}) \right].$$

Таким образом, на каждом шаге  $t$  осуществляется поиск максимума функции

$$\tilde{l}_t = \ln f(y_t | y_{<t}, a_{\leq t}) = -\frac{k_t}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} h_t k_t - \frac{1}{2} e^{-h_t} (y_t - P_t)^T (y_t - P_t),$$

для которой вектор-столбец расчетных цен облигаций  $P_t = \sum_{i=1}^n C_i e^{-R_t(m_i)m_i}$ ,  $\tilde{s}_t = \frac{\partial \tilde{l}_t}{\partial a_t}$

и  $b_t b_t^T = -\frac{\partial^2 \tilde{l}_t}{\partial a_t \partial a_t^T}$ .

Параметры модели  $\gamma_j$ ,  $\phi_j$  и  $\sigma_j^2$  в общем случае определяются путем максимизации по указанным параметрам функции правдоподобия, аппроксимированной при помощи метода Лапласа, которая представлена формулой

$$l = \sum_{t=1}^T l_t = \sum_{t=1}^T \ln f(y_t | y_{<t}). \quad (5)$$

Вклад отдельного наблюдения  $l_t$  определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} l_t \approx \tilde{l}_t - \frac{1}{2} \ln |I + b_t^T V_{t|t-1} b_t| - \frac{1}{2} (a'_t - a_{t|t-1})^T V_{t|t-1}^{-1} (a'_t - a_{t|t-1}) + \\ + \frac{1}{2} (a'_t - a_{t|t})^T V_{t|t} (a'_t - a_{t|t}). \end{aligned}$$

Восстановление и прогнозирование временной структуры процентных ставок производилось на данных о государственных облигациях (облигациях федерального займа), торгуемых на российском рынке за январь-апрель и август-ноябрь 2012 г. При этом в расчетах не участвовали облигации с амортизируемым долгом, поскольку котировки данных бумаг характери-

зуются достаточно сильной волатильностью в периоды, близкие к выплатам части основного долга [1]. Кроме того, при исключении облигаций с амортизируемым долгом повышается однородность выборки, поскольку эти облигации имеют гораздо более низкую ликвидность. Так, за период с 03.01.2012 по 13.04.2012 с девятью государственными облигациями с амортизируемым долгом (28 % от общего количества государственных облигаций в обращении), было совершено всего 12,3 % сделок из общей выборки. Объем указанных сделок составил только 5 % от общего объема сделок со всеми государственными облигациями России за рассматриваемый период.

С учетом исключения из выборки облигаций с амортизируемым долгом в расчетах принимало участие 25 государственных облигаций Российской Федерации, находившихся в обращении в период с 03.01.2012 по 13.04.2012 и с 01.08.2012 по 15.11.2012. Число торговых дней в указанные периоды составило 72 и 76 соответственно, при этом оценка модели производилась по ценам первых 62 (66) торговых дней, тогда как оставшиеся 10 торговых дней каждой выборки использовались для построения и проверки точности прогнозов. В расчетах использовалась информация о параметрах облигационных выпусков (номинал, дата погашения номинала, наличие оферты, величины купонных платежей, периодичность и даты выплат купонов), опубликованная в Интернете <sup>2</sup>, а также рыночные котировки облигаций (цены закрытия торгов на объединенной бирже ММВБ-РТС) за рассматриваемые периоды <sup>3</sup>.

Поскольку в соответствии с общепринятой практикой при покупке облигации покупатель выплачивает ее продавцу котировку и накопленный купонный доход, фактическая цена облигации рассчитывалась как их сумма. При этом накопленный купонный доход для соответствующей даты вычислялся по следующей формуле:

$$НКД = C_1 \frac{t_0 - t_{-1}}{t_1 - t_{-1}},$$

где  $C_1$  – размер текущего (относительно даты торгов) купона (в денежных единицах),  $t_0$  – текущая дата (дата торгов),  $t_{-1}$  – дата начала соответствующего купонного периода,  $t_1$  – дата окончания соответствующего купонного периода.

При помощи предлагаемого алгоритма по данным из первой части выборки (январь-апрель 2012 г.) были получены оценки параметров модели и динамических коэффициентов кривой, на основе которых затем были построены прогнозы коэффициентов кривой доходности и цен облигаций. Прогнозирование осуществлялось с использованием имитаций ошибок методом Монте-Карло в уравнениях (2)–(4). Вторая часть выборки (август-ноябрь 2012 г.) использовалась для проверки гипотезы о том, что начальную точку и оптимальные значения параметров, полученные для первой выборки, можно использовать для оценивания и прогнозирования по второй части выборки.

Ниже представлены результаты оценивания статической модели и оптимальные значения параметров модели, полученные при максимизации функции правдоподобия (5) для первой части наблюдений:

$$\begin{array}{ll} \beta_0 = 0,084 & \sigma_0^2 = 0,06144 \cdot 10^{-4} \\ \beta_1 = -0,029 & \sigma_1^2 = 16,70 \cdot 10^{-4} \\ \beta_2 = -4,051 \cdot 10^{-9} & \sigma_2^2 = 16,70 \cdot 10^{-4} \\ \tau = 1,735 & \sigma_h^2 = 67,38 \cdot 10^{-4} \\ h_0 = 4,125 & \end{array}$$

Для сокращения числа оптимизируемых параметров модели предполагалось, что вектор  $R_t^a$  состоит из нулей, а матрица  $R_t^{aa}$  является единичной. Полученные значения коэффициентов для статической модели в дальнейшем использовались в качестве начальной точки при определении коэффициентов динамической модели.

<sup>2</sup> Облигации в России, группа Интерфакс. URL: <http://www.rusbonds.ru>

<sup>3</sup> Инвестиционная компания Финнам.ру. URL: <http://www.finam.ru>; Объединенная биржа ММВБ-РТС. URL: <http://rts.micex.ru>; Финансовый портал «МФД-ИнфоЦентр». URL: <http://mfd.ru>

После оценивания коэффициентов статической и динамической моделей по ним были восстановлены кривые доходности (рис. 1) и рассчитаны процентные ставки для различных сроков (рис. 2).

Как видно по графику на рис. 2, ставки для коротких сроков до погашения ниже, чем ставки для длинных сроков, кроме того краткосрочные ставки характеризуются большей изменчивостью по сравнению с долгосрочными, что вполне согласуется с реальностью.

На рис. 3–6 представлена полученная динамика оценок ненаблюдаемых коэффициентов модели Нельсона – Сигеля за рассматриваемый период.

Значения, полученные для статической модели, на графиках обозначены горизонтальными пунктирными линиями. Поскольку оценки коэффициентов, получаемые для статического варианта модели, в некотором смысле являются усреднением динамических коэффициентов, кривая доходности, восстановленная на основе таких коэффициентов, может хорошо согласовываться с реальными данными только в случае, когда оценивание проводится на достаточно коротком временном интервале. Этот вывод подтверждается рис. 1, где при неизменности «статической» кривой доходности за рассматриваемый период кривая доходности, построенная на основе коэффициентов динамической модели, не только параллельно сдвинулась вниз, но и изменила наклон.

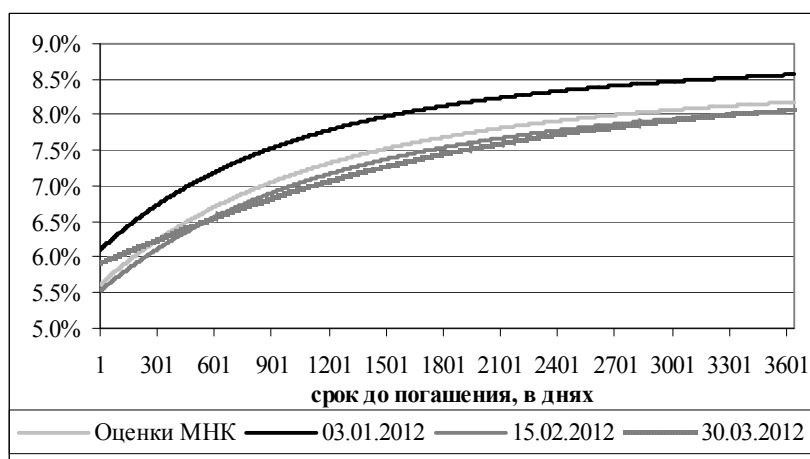


Рис. 1. Кривые бескупонной доходности, восстановленные по оценкам коэффициентов статической и динамической моделей (для начала, середины и конца оцениваемого периода)

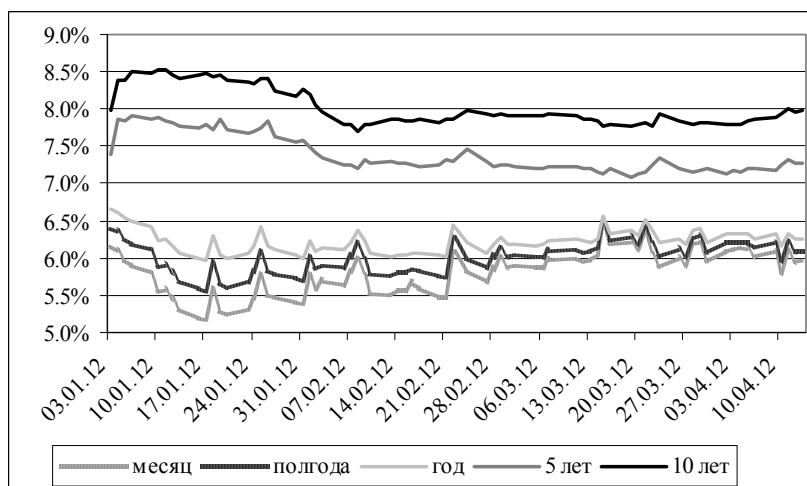
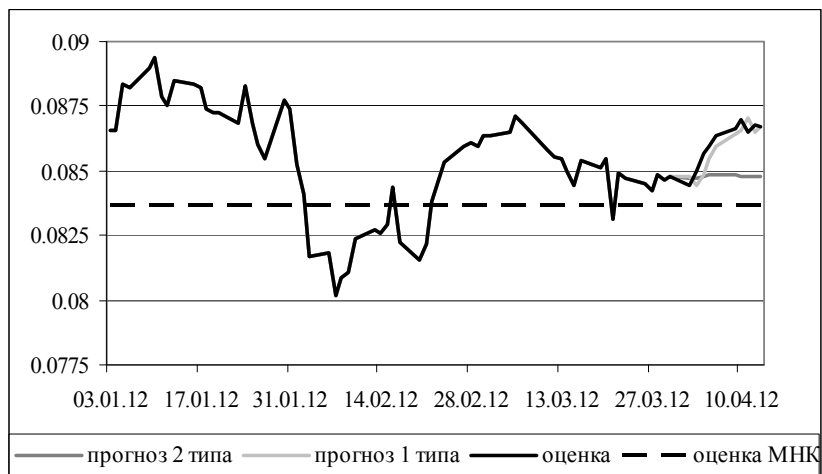
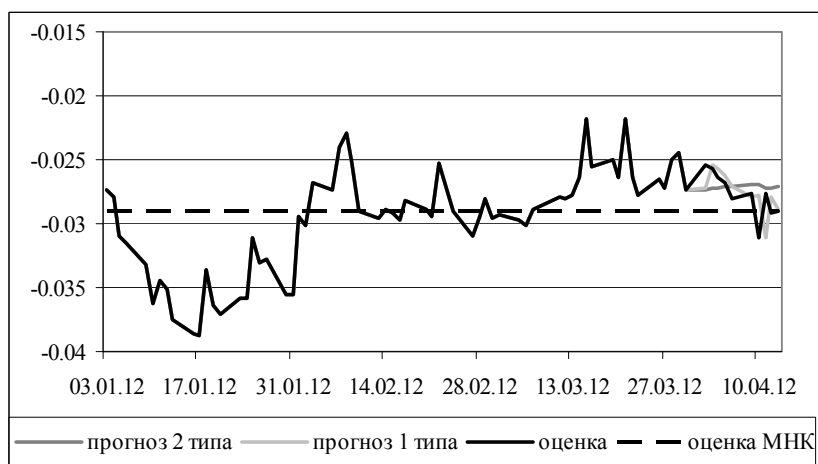
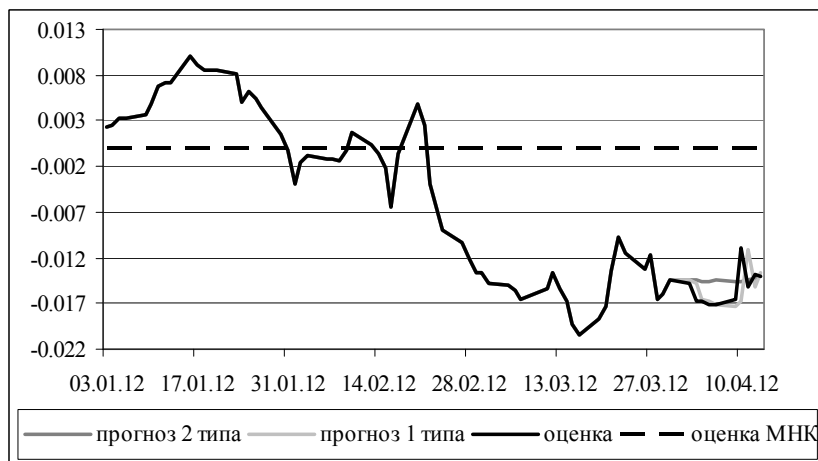


Рис. 2. Динамика ставок для различных сроков до погашения с 03.01.2012 по 13.04.2012

Рис. 3. Динамика коэффициента  $\beta_0$ .Рис. 4. Динамика коэффициента  $\beta_1$ Рис. 5. Динамика коэффициента  $\beta_2$

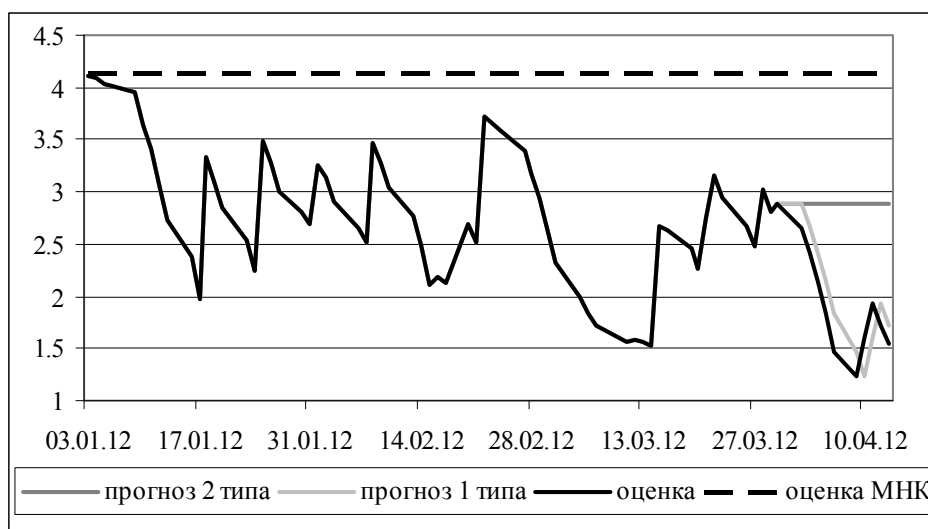


Рис. 6. Динамика коэффициента  $h$

Приведенные графики (см. рис. 3–6) также содержат прогнозы коэффициентов модели. Для проверки возможности прогнозирования на основе динамической модели было построено два типа прогнозов: одношаговый (первого типа) и многошаговый (второго типа), которые отличались использованием новой информации при построении прогноза. В первом случае строился прогноз коэффициентов на один день вперед, при этом недостающие оценки коэффициентов за предыдущие дни восстанавливались, т. е. использовалась вся доступная информация; при построении многошагового прогноза оценки коэффициентов за прогнозный период не восстанавливались, т. е. прогноз строился больше чем на один день вперед.

На основе полученных оценок коэффициентов модели и соответствующих им кривых доходности были восстановлены расчетные цены облигаций, а также с использованием имитаций методом Монте-Карло построено три типа прогнозов цен: на основе одношаговых и многошаговых прогнозов коэффициентов, а также на основе коэффициентов статической модели.

Для проверки соответствия цен облигаций, восстановленных на основе оценок моделей, фактически наблюдавшимся ценам и оценки точности полученных прогнозов были рассчитаны статистики  $R^2$  (квадрат корреляции) по фактическим ценам и расчетным значениям цен для динамической модели, а также по фактическим ценам и соответствующим прогнозам первого и второго типов. Указанные статистики составляют соответственно 98,824, 99,470 и 99,467 %, тогда как для статической модели соответствующие значения равны 96,171 и 98,466 % (прогнозы первого и второго типов для статического варианта модели совпадают между собой; поскольку коэффициенты модели считаются постоянными).

Для проверки возможности использования начальной точки и оптимальных значений параметров, полученных по первой части выборки, на более позднем временном интервале, использовалась вторая часть данных (август–ноябрь 2012 г.), отстоящая от первой части более чем на квартал. Модель была обчислена для трех случаев:

- с использованием начальной точки и параметров, полученных по первой части выборки;
- с использованием параметров, полученных по первой части выборки, и пересчета начальной точки;
- с определением новой начальной точки и оптимальных значений параметров по второй части данных.

Таким образом, получены значения начальной точки и оптимальные значения параметров для второй части данных:

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= 0,088 & \sigma_0^2 &= 0,06144 \cdot 10^{-4} \\
 \beta_1 &= -0,027 & \sigma_1^2 &= 0,06144 \cdot 10^{-4} \\
 \beta_2 &= -1,530 \cdot 10^{-9} & \sigma_2^2 &= 0,1234 \cdot 10^{-4} \\
 \tau &= 4,688 & \sigma_h^2 &= 24,79 \cdot 10^{-4} \\
 h_0 &= 4,474
 \end{aligned}$$

При использовании найденных, а также рассчитанных ранее значений было проведено оценивание динамического варианта рассматриваемой модели. По полученной динамике оценок коэффициентов были восстановлены кривые доходности и соответствующие цены облигаций, а затем получен прогноз динамики коэффициентов и цен облигаций соответственно.

Для сравнения перечисленных выше вариантов использования начальной точки и оптимальных значений параметров на второй части данных, а также для сравнения рассматриваемых моделей в целом в таблице указаны некоторые статистики. Как видно, корректно применять динамическую модель только в случае пересчета и начальной точки, и оптимальных значений параметров для новой выборки. В целом можно заметить, что модели, построенные для первой выборки, лучше объясняют наблюдавшиеся данные, чем модели по второй выборке, а качество прогнозов первого типа (одношагового), вопреки ожиданиям, оказалось эквивалентно качеству прогнозов второго типа (многошагового), что, возможно, объясняется небольшим горизонтом прогнозирования.

Сводная таблица статистик для различных вариантов модели

| Модель                            |                                       | $R^2$ (расчетные значения модели), % | $R^2$ (прогноз первого / второго типа), % | Прочее                     |
|-----------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------|
| Статическая (январь-апрель 2012)  |                                       | 96,17                                | 98,47                                     |                            |
| Динамическая (январь-апрель 2012) |                                       | 98,82                                | 99,47 / 99,46                             |                            |
| Статическая (август-ноябрь 2012)  |                                       | 92,71                                | 86,12                                     |                            |
| Динамическая (август-ноябрь 2012) | начальная точка и параметры неизменны | 0,01                                 | 4,57 / 4,60                               | рост $\beta_0$ в 18 раз    |
|                                   | новая начальная точка                 | 0,03                                 | 3,13 / 3,11                               | рост $\beta_0$ в 2 700 раз |
|                                   | новая начальная точка и параметры     | 97,41                                | 98,63 / 98,63                             |                            |

Перечислим основные результаты проведенного исследования.

Оценки коэффициентов кривой доходности для динамической модели Нельсона – Сигеля со стохастической волатильностью в ошибке являются более точными, чем для статического варианта модели. Для восстановления пропущенных (из-за отсутствия торгов по облигациям) наблюдений за ценами предпочтительнее использовать динамический вариант модели.

Применение динамической модели позволяет получить более точные прогнозы цен облигаций по сравнению с применением статической модели.

Использование предлагаемой постановки динамической модели в целом можно считать более предпочтительным по сравнению со статическим вариантом модели.

Как показали расчеты, гипотеза о возможности использования заранее полученных оптимальных значений параметров и начальной точки для моделирования на новых данных не подтверждается: соответствие результатов моделей с предложенными вариантами их использования и реальных данных оказалось неудовлетворительным.

Предложенный вариант модели и алгоритм ее оценивания может успешно использоваться для оценивания динамики временной структуры процентных ставок и получения прогнозов кривых доходности и цен облигаций.

## Список литературы

1. Корнев К. В. Оценка кривых временной структуры процентных ставок российского рынка облигаций различных групп кредитного риска // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Социально-экономические науки. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 119–132.
2. Stander Y. S. Yield Curve Modeling. Palgrave Macmillan, 2005. 188 p.
3. Nelson C. R., Siegel A. F. Parsimonious Modeling of Yield Curve // Journal of Business. 1987. No. 60. P. 473–489.
4. Цыплаков А. А. Сделать тайное явным: искусство моделирования с помощью стохастической волатильности // Квантиль. 2010. № 8. С. 69–122.
5. Цыплаков А. А. Введение в моделирование в пространстве состояний // Квантиль. 2011. № 9. С. 1–24.

*Материал поступил в редколлегию 08.04.2013*

**O. V. Stepanova**

Novosibirsk State University  
2, Pirogov str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

E-mail: stepanova.hel@gmail.com

## MODELING AND FORECASTING THE TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES

In this paper the term structure of interest rates is modeled and forecasted using Nelson-Siegel model with changing coefficients and stochastic volatility in residuals. Possibility of applying Laplace's method to filtering in the resulting state-space model is studied. The good-quality estimates of yield curves and bond prices were obtained with the help of proposed algorithm.

*Keyword:* Yield curve, government bonds, Nelson-Siegel model, state-space model, method Laplace.