Научная статья

УДК 334 + 338.2 + 519.85
JEL C02, C65, G31, O22
DOI 10.25205/2542-0429-2022-22-1-52-71

Распределение прибыли от объекта коммерческой недвижимости между инвестором и застройщиком

Александр Юрьевич Сафонкин [1]
Александр Борисович Хуторецкий [2]

[1] ЗАО «Золотая корона»
Новосибирск, Россия

[2] Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет
Новосибирск, Россия

[1] aleksandr.safonkin98@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-9977-9138
[2] khutoretskij@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-2189-1178

Аннотация

Допустим, что застройщик инициирует инвестиционный проект строительства и эксплуатации объекта коммерческой недвижимости, вкладывает в него собственные средства и, поскольку они недостаточны для финансирования строительства, привлекает инвестора. Предположительно, эксплуатация объекта даст поток прибыли, которая будет распределяться между застройщиком и инвестором. Допустим, что каждый участник проекта указывает требования к окупаемости своих затрат: ставку дисконтирования потока доходов (минимальную приемлемую доходность вложений) и максимальный приемлемый срок окупаемости. Используя средства инвестора, застройщик обязуется выполнить его требования к окупаемости затрат и хотел бы освободиться от этого обязательства как можно раньше. Кроме того, каждый участник проекта заинтересован в сокращении срока окупаемости своих затрат. Следовательно, минимизация максимума из сроков окупаемости затрат инвестора и застройщика (при выполнении их требований к окупаемости) обеспечивает согласование интересов участников проекта. Проект может быть реализован, только если существует вариант распределения прибыли, обеспечивающий выполнение требований участников к окупаемости затрат. В типичных схемах распределения прибыли доли участников постоянны во времени и либо пропорциональны взносам участников, либо обеспечивают одновременное возмещение их затрат. Мы предлагаем считать долю участника в прибыли ступенчатой функцией времени со скачками в момент окупаемости его затрат и в момент окупаемости затрат его партнера. Такая постановка задачи, насколько нам известно, ранее не рассматривалась. Задача сводится к условной максимизации двух нелинейных дифференцируемых функций одной переменной. Обоснован алгоритм, который при любом наборе значений параметров задачи либо находит целесообразное распределение прибыли, либо выясняет, что задача

© Сафонкин А. Ю., Хуторецкий А. Б., 2022

неразрешима. Предложенный подход расширяет множество ситуаций, в которых можно найти приемлемое для обоих участников распределение прибыли и, следовательно, расширяет множество реализуемых проектов.

Ключевые слова

застройщик, инвестор, распределение прибыли, ставка дисконтирования, срок окупаемости

Для цитирования

Сафонкин А. Ю., *Хуторецкий А. Б.* Распределение прибыли от объекта коммерческой недвижимости между инвестором и застройщиком // Мир экономики и управления. 2022. Т. 22, № 1. С. 52–71. DOI 10.25205/2542-0429-2022-22-1-52-71

Distribution of Profits from a Commercial Real Estate Object between Investor and Developer

Alexandr Yu. Safonkin [1], **Alexandr B. Khutoretskii** [2]

[1] CJSC "Golden crown",
Novosibirsk, Russian Federation

[2] Novosibirsk State University
Novosibirsk, Russian Federation

[1] aleksandr.safonkin98@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-9977-9138
[2] khutoretskij@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-2189-1178

Abstract

Suppose that a developer initiates an investment project to build and operate a commercial real estate object, invests his own funds and, because they are insufficient, attracts an investor. The operation of the object will presumably generate a profit stream to be shared between the project participants. Suppose that each project participant specifies his requirements for the cost recovery, namely, the discount rate of income stream (the minimum acceptable return on investment) and the maximum acceptable payback period. The use of the investor's funds imposes an obligation on the developer to fulfill the investor's requirements on investment return. Developer would like to get rid of this obligation as early as possible. In addition, each project participant has an interest in reducing his payback period. Therefore, minimizing the maximum of the investor's and the developer's cost-recovery times (if their cost-recovery requirements are met) ensures that the interests of the project participants were aligned. The project can only be realized if there exists a profit-sharing scheme meeting both participants' cost recovery requirements. In typical profit-sharing schemes, participants' shares are constant over time and either proportional to participants' contributions or provide simultaneous cost recovery. We propose to consider a participant's profit share as a step function of time, with jumps at the moment of his cost recovery and at the moment of his partner's cost recovery. Such problem statement has not, to our knowledge, been considered before. The problem reduces to the conditional maximization of two nonlinear differentiable functions of one variable. The article justifies an algorithm that either solves the problem or reveals its insolvability. The proposed approach broadens the range of situations in which an acceptable to both participants profit sharing scheme can be found, thus broadening the set of implementable projects.

Keywords

developer, investor, profit distribution, discount rate, payback period

For citation

Safonkin A. Yu., Khutoretskii A. B. Distribution of Profits from a Commercial Real Estate Object between Investor and Developer. *World of Economics and Management*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 52–71. (in Russ.) DOI 10.25205/2542-0429-2022-22-1-52-71

Введение

Мы рассматриваем инвестиционный проект, в котором участвуют застройщик и инвестор. Проект предполагает строительство и эксплуатацию объекта коммерческой недвижимости, который на этапе эксплуатации генерирует поток прибыли (например, за счет сдачи помещений в аренду). Взаимодействие между застройщиком и инвестором на этапе согласования проекта (до начала его реализации) мы представляем следующим образом.

1. Инициатором проекта является застройщик. Он обеспечивает землеотвод и получает разрешение на строительство, выбирает подрядчика и совместно с ним разрабатывает сметную документацию. Зная сметную стоимость объекта, застройщик может определить необходимый объем внешних инвестиций. Допустим, что денежные средства инвестора необходимы для реализации проекта.

2. Учитывая предполагаемый размер инвестиций, ожидаемую прибыльность и риски, каждый участник проекта определяет требования к его выгодности: за приемлемое время обеспечить достаточную величину внутренней нормы доходности (internal rate of return, IRR). Иначе говоря, участник проекта требует, чтобы к указанному сроку его вложения окупились с указанной ставкой дисконтирования. Согласие застройщика использовать деньги инвестора подразумевает, что он обязуется распределять ожидаемый поток прибыли от эксплуатации объекта так, чтобы обеспечить выполнение требований инвестора. Допустим, что такие способы распределения прибыли существуют (в противном случае проект невозможно реализовать с участием данного инвестора).

3. Предположим, что застройщик стремится приблизить момент «полной окупаемости», к которому будут выполнены и его требования к доходности проекта, и его обязательства перед инвестором. Тогда из всех способов распределения прибыли, обеспечивающих выполнение требований участников проекта, застройщик выберет тот, который минимизирует максимум из сроков окупаемости затрат участников проекта. Мы имеем в виду, естественно, дисконтированные сроки окупаемости (discounted payback period, DPP), причем требования участников проекта к доходности, и, следовательно, ставки дисконта соответствующих денежных потоков могут различаться. Если предложенный застройщиком способ распределения прибыли обладает указанными выше свойствами, следует ожидать, что инвестор с ним согласится. После этого участники проекта могут формулировать договор о реализации проекта.

4. Допустим, что инвестор и застройщик договариваются о создании общества с ограниченной ответственностью (ООО) для строительства и последующей эксплуатации объекта. Инвестор вкладывает в ООО денежные средства. Застройщик вносит в ООО нефинансовые активы (разрешительную и проектную документацию, договор с подрядчиком и пр.) и, возможно, собственный капитал. Совокупная денежная оценка вклада застройщика устанавливается по соглашению участников. Договор, в частности, фиксирует требования участников проекта к доходности и срокам окупаемости вложений, способ распределения прибыли и соответствующие графики платежей участникам проекта.

Цель нашей работы – предложить метод, который либо находит целесообразное распределение прибыли, либо сообщает, что такого распределения нет среди распределений рассматриваемого типа.

В литературе описаны некоторые варианты формализации задачи распределения прибыли (или другого результата совместной деятельности) и подходы к ее решению.

Теория игр указывает методы распределения результата совместной деятельности в предположении, что единица результата имеет одинаковую ценность для участников (трансферабельная полезность): пропорциональное решение, эгалитарное решение, *N*-ядро, вектор Шепли и др., см. [1, гл. 6]. Пропорциональное решение распределяет результат пропорционально полным затратам участников. Эгалитарное решение покрывает полные затраты участников, а оставшуюся часть результата распределяет поровну.

В нашем случае предположение о трансферабельной полезности не выполнено, так как единица прибыли, полученная в момент $t > 0$, имеет, вообще говоря, различную приведенную стоимость для участников проекта. Тем не менее, предложенный ниже способ распределения прибыли использует идеи и эгалитарного решения (сначала покрываются затраты участников с учетом их требований к доходности проекта), и пропорционального решения (после момента полной окупаемости прибыль распределяется пропорционально вкладам участников или другим способом, который они сочтут справедливым).

В ООО «по общему правилу прибыль распределяется пропорционально стоимости вкладов, если иное не предусмотрено… соглашением» участников (ст. 1048 ГК РФ). Если схема распределения прибыли (например, пропорциональная) не удовлетворяет требованиям одного из участников, его долю в прибыли придется увеличить, но нет оснований сохранять «смещенную» пропорцию после того, как затраты окупятся. Следовательно, целесообразно рассматривать схемы платежей, в которых доли участников в прибыли зависят от времени. Мы ограничимся «трёхчастными» схемами, допускающими изменения пропорций распределения прибыли только в моменты окупаемости затрат участников. Расширение множества допустимых платежных схем увеличивает, конечно, шансы застройщика на достижение договоренности с инвестором и, впоследствии, реализацию проекта.

Требование участника проекта к доходности капитала (цене использования его денег в единицу времени) отражено в его индивидуальной ставке дисконтирования. В момент окупаемости затрат проект обеспечивает участнику индивидуальный уровень IRR, равный оговоренной ставке дисконтирования. Следовательно, в платежных схемах рассматриваемого типа распределение прибыли изменяется при достижении некоторых пороговых значений индивидуальных IRR. Изменение пропорций распределения прибыли в зависимости от достигнутого значения IRR проекта используется в рамках популярного сейчас метода «IRR Waterfall» для уменьшения рисков, с которыми сталкиваются участники проекта вследствие неопределенности его финансовых результатов, см. [2]. Мы предлагаем применить эту идею для разработки схемы платежей, удовлетворяющей требованиям участников проекта.

Методикам анализа и оценки инвестиций в коммерческую недвижимость, дисконтированию соответствующих денежных потоков и выбору ставок дисконтирования посвящена обширная литература, например, [3, гл. 15; 4, p. 204–209; 5; 6]. Зная предполагаемый денежный поток, потенциальный участник проекта может оценить целесообразность своего участия стандартными способами: а) зафиксировать желательный уровень доходности и сравнить DPP с приемлемым сроком окупаемости вложений; б) выбрать максимальный приемлемый срок окупаемости и сравнить IRR с приемлемым уровнем доходности. Но денежные потоки участников становятся известны только после выбора способа распределения прибыли на промежутке от начала эксплуатации объекта до момента окупаемости затрат обоих участников. Следовательно, разработка приемлемой схемы платежей на указанном промежутке является необходимым элементом оценки целесообразности проекта для застройщика и инвестора. Насколько нам известно, такая постановка задачи в предшествующей литературе не рассматривалась.

1. Постановка задачи

Участники проекта – инвестор и застройщик (присвоим им номера 1 и 2 соответственно) – создают ООО для его реализации. В момент 0 участник $i \in \{1, 2\}$ вкладывает в проект капитал в размере K_i. Предполагаем, что величина K_2 учитывает неденежную часть вклада застройщика (организация инженерных и проектных работ, подготовка документации, переговоры с подрядчиком и пр.), оцененную вне модели по договоренности между участниками проекта.

Длительность строительства объекта обозначим T_0. После момента T_0, в период эксплуатации объекта, прибыль распределяется между инвестором и застройщиком. Взамен вложенного в проект капитала участник i получает поток доходов плотности $C_i(t)$. Предполагаем, что $C_i(0) = -K_i$ и $C_i(t) = 0$ для $t \in [0, T_0)$.

Предположение 1. Ожидаемая доходность капиталовложений участника i вне проекта эквивалентна доходности непрерывного реинвестирования по номинальной ставке δ_i.

Из предположения 1 следует, что с точки зрения участника i приведенная к моменту 0 цена денег момента t равна $e^{-\delta_i t}$. Тогда при $t > T_0$ участник i оценивает чистый дисконтированный доход от проекта за период $[0, t]$ величиной

$$\mathrm{NPV}_i\left(t\right) = -K_i + \int_{T_0}^{t} C_i\left(\tau\right) e^{-\delta_i \tau} d\tau.$$

Затраты участника i окупаются в момент $t > 0$, если $\mathrm{NPV}_i(t) = 0$; такой момент t (если он существует), обозначим t_i. Тогда δ_i – это IRR проекта за период $[0, t_i]$ для участника i.

Предположение 2. Участник i указывает максимальный приемлемый для него срок окупаемости $T_i > T_0$, т. е. должны выполняться неравенства $t_i \le T_i$ для $i \in \{1, 2\}$.

Фиксируя δ_i и T_i, участник i устанавливает свои требования к доходности проекта. Принимая условия инвестора (срок окупаемости не больше T_1 при ставке дисконтирования δ_1), застройщик, фактически, обязуется обеспечить выполнение этих условий. Чтобы приблизить момент, когда и его затраты компенсированы, и обязательства выполнены, застройщик минимизирует срок полной окупаемости $t_{\max} = \max\{t_1, t_2\}$.

Сроки окупаемости затрат зависят от способа распределения прибыли. Естественно предположить, что, приглашая инвестора в проект, застройщик предлагает ему некоторый вариант распределения прибыли. Этот вариант должен гарантировать неравенства $t_i \le T_i$, $i \in \{1, 2\}$. Стандартное распределение прибыли – пропорционально вкладам участников – приемлемо после момента $t_{\max}$, но на промежутке $[T_0, t_{\max}]$ оно, вообще говоря, не гарантирует ни выполнение условий $t_i \le T_i$, ни минимизацию $t_{\max}$. Цель нашей работы – предложить способ распределения прибыли в периоде $[T_0, t_{\max}]$.

Мы будем искать оптимальное распределение прибыли среди распределений, удовлетворяющих следующему предположению.

Предположение 3. Пусть A – плотность потока прибыли от эксплуатации объекта.

(а) На промежутке $[T_0, \min\{t_1, t_2\}]$ инвестор получает долю $\alpha \in [0, 1]$, а застройщик – долю $1 - \alpha$ от прибыли:

$$C_1(t) = \alpha A \text{ и } C_2(t) = (1-\alpha)A \text{ для } t \in [T_0, \min\{t_1, t_2\}].$$

(б) После момента t_1 инвестор получает указанную в контракте долю прибыли $\gamma \in [0, 1]$, а застройщик – долю $1 - \gamma$:

$$C_1(t) = \gamma A \text{ и } C_2(t) = (1-\gamma)A \text{ для } t \ge t_1.$$

(в) Если $t_2 < t_1 = t_{\max}$, то в период $(t_2, t_1]$ застройщик всю прибыль отдает инвестору, чтобы приблизить момент $t_{\max}$: $C_1(t) = A$ и $C_2(t) = 0$ для $t \in (t_2, t_1]$.

(г) В любом случае должно выполняться условие $t_i \le T_i$ для $i \in \{1, 2\}$.

Значение γ определяется за рамками модели соглашением участников проекта о распределении прав собственности на построенный объект. Предметом выбора в нашей статье является только доля прибыли α, которую получает инвестор на промежутке $[T_0, \min\{t_1, t_2\}]$. В соответствии с предположением 3 значение α однозначно определяет сроки окупаемости затрат инвестора и застройщика, поэтому обозначим: $t_i(\alpha) = t_i$ для $i \in \{1, 2\}$ и $t(\alpha) = t_{\max}$.

Задача состоит в том, чтобы найти значение $\alpha \in [0, 1]$, удовлетворяющее условиям (а)–(г), при котором величина $t(\alpha) = \max\{t_1(\alpha), t_2(\alpha)\}$ минимальна. Эту задачу обозначим P.

Допустим, что $a \ge 0$ и экономический агент в течение периода $[a, b]$ получает поток доходов постоянной плотности C. Найдем стоимость этого потока, приведенную к моменту 0, при непрерывном дисконтировании с номинальной ставкой δ:

$$K(a,b,\delta,C) = C\int_a^b e^{-\delta t}dt = \frac{C}{\delta}\left(e^{-\delta a} - e^{-\delta b}\right). \qquad (1)$$

Пусть

$$\bar{K}(a,\delta,C) = \lim_{b\to+\infty} K(a,b,\delta,C) = \frac{C}{\delta}e^{-\delta a}.$$

Понятно, что поток доходов плотности C, начинающийся не раньше момента a, не может окупить инвестиции в размере $K \ge \bar{K}(a,\delta,C)$ с внутренней нормой доходности δ.

Поскольку $C_i(t) \le A$ для всех t, необходимым (но, вообще говоря, не достаточным) условием того, что вложения инвестора и застройщика окупятся с доходностями δ_1 и δ_2 соответственно, являются неравенства $K_i < \bar{K}(T_0,\delta_i,A)$, что эквивалентно неравенству

$$A > \max_{i\in\{1,2\}}\left\{K_i\delta_i e^{\delta_i T_0}\right\}. \qquad (2)$$

Другими словами, плотность генерируемого объектом потока прибыли должна быть достаточно велика, чтобы обеспечить окупаемость затрат участников за конечное время. Далее будем считать, что условие (2) выполнено.

2. Решение задачи

Пусть P_1 – задача P с дополнительным условием $t_1(\alpha) \le t_2(\alpha)$ (затраты инвестора окупаются не позже, чем затраты застройщика), а P_2 – задача P с дополнительным условием $t_2(\alpha) \le t_1(\alpha)$ (затраты застройщика окупаются не позже, чем затраты инвестора). Для $k \in \{1, 2\}$ обозначим M_k множество оптимальных решений задачи P_k и положим $M = M_1 \cup M_2$.

Множество M содержит все оптимальные решения задачи P. Чтобы их найти, достаточно минимизировать $t(\alpha)$ на M, это легко, так как $t(\alpha)$ на M имеет не более двух различных значений (которые соответствуют оптимальным решениям задач P_1 и P_2).

2.1. Решение задачи P_1

Рассматриваем случай $t_1(\alpha) \le t_2(\alpha)$. В этом случае $t(\alpha) = t_2(\alpha)$ и задача имеет вид $\min\{t_2(\alpha) \mid \alpha \in (0, 1], t_1(\alpha) \le T_1, t_2(\alpha) \le T_2, t_1(\alpha) \le t_2(\alpha)\}$.

Из пункта (a) предположения 3 следует, что $t_1(\alpha)$ является решением относительно t уравнения

$$K_1 = K(T_0,t,\delta_1,\alpha A) = \frac{\alpha A}{\delta_1}\left(e^{-\delta_1 T_0} - e^{-\delta_1 t}\right).$$

Отсюда

$$e^{-\delta_1 t_1(\alpha)} = e^{-\delta_1 T_0} - K_1\frac{\delta_1}{\alpha A} \text{ и } t_1(\alpha) = -\frac{1}{\delta_1}\ln\left(e^{-\delta_1 T_0} - K_1\frac{\delta_1}{\alpha A}\right). \qquad (3)$$

Лемма 1. Описанная формулой (3) функция $t_1(\alpha)$ определена в точке $\alpha \le 1$, если и только если $\alpha \in (\alpha_1, 1]$, где $\alpha_1 = K_1\delta_1 e^{\delta_1 T_0} / A < 1$. На множестве $(\alpha_1, 1]$ функция положительна и монотонно убывает.

Доказательство. Функция $t_1(\alpha)$ определена, если и только если аргумент логарифма в (3) положителен, что эквивалентно $\alpha > \alpha_1$. Из (2) следует $\alpha_1 < 1$, поэтому областью определения функции на множестве $(0, 1]$ является непустой промежуток $(\alpha_1, 1]$. Из $\delta_1 T_0 > 0$ следует $e^{\delta_1 T_0} > 1$, поэтому $e^{\delta_1 T_0} - 1 < 0 < K_1\delta_1 / \alpha A$. Значит, аргумент логарифма в (3) меньше единицы и $t_1(\alpha) > 0$ для $\alpha \in (\alpha_1, 1]$. Очевидно, что $t_1(\alpha)$ убывает на $(\alpha_1, 1]$. #

Следующие три леммы позволят записать задачу P_1 в удобном для анализа виде.

Лемма 2. Пусть $\alpha_2 = K_1\delta_1 \Big/ A\left(e^{-\delta_1 T_0} - e^{-\delta_1 T_1}\right)$. Ограничение $t_1(\alpha) \le T_1$ задачи P_1 эквивалентно $\alpha \ge \alpha_2$, причем $\alpha_1 < \alpha_2$ и $t_1(\alpha_2) = T_1$. Если $\alpha_2 > 1$, то задача P_1 несовместна.

Доказательство. Условие $t_1(\alpha) \le T_1$ эквивалентно $K(T_0, T_1, \delta_1, \alpha A) \ge K_1$. Используя (1), решим это неравенство относительно α и получим $\alpha \ge \alpha_2$. Значит, при $\alpha_2 > 1$ задача несовместна. Легко проверить, что $t_1(\alpha_2) = T_1$. Из $T_1 > T_0$ следует, что $0 < e^{-\delta_1 T_0} - e^{-\delta_1 T_1} < e^{-\delta_1 T_0}$, отсюда $\alpha_1 < \alpha_2$. #

Учитывая лемму 2, будем далее считать, что $\alpha_2 \le 1$, т. е.

$$K_1\delta_1 \le A\left(e^{-\delta_1 T_0} - e^{-\delta_1 T_1}\right). \tag{4}$$

Ограничение $t_1(\alpha) \le t_2(\alpha)$ задачи P_1 можно переформулировать следующим образом: за период $[T_0, t_1(\alpha)]$ застройщик получит дисконтированный доход, не превосходящий его вклад в проект, что эквивалентно неравенству

$$K\left(T_0, t_1(\alpha), \delta_2, (1-\alpha)A\right) = \frac{(1-\alpha)A}{\delta_2}\left[e^{-\delta_2 T_0} - e^{-\delta_2 t_1(\alpha)}\right] \le K_2. \tag{5}$$

Лемма 3. Существует $\alpha_3 \in [\alpha_2, 1]$ такое, что условие (5) выполняется для всех $\alpha \in [\alpha_3, 1]$ и не выполняется для $\alpha \in [\alpha_2, \alpha_3)$.

Доказательство. Функция $t_1(\alpha)$ убывает на $[\alpha_2, 1]$ по лемме 1. Следовательно, $K(T_0, t_1(\alpha), \delta_2, (1-\alpha)A)$ тоже убывает по α на $[\alpha_2, 1]$. Из $t_1(\alpha_2) = T_1$ (лемма 2) следует, что при $K(T_0, T_1, \delta_2, (1-\alpha_2)A) \le K_2$ утверждение леммы 3 справедливо для $\alpha_3 = \alpha_2$ (в этом случае $[\alpha_2, \alpha_3) = \varnothing$). Предположим, что

$$K\left(T_0, t_1(\alpha_2), \delta_2, (1-\alpha_2)A\right) > K_2 > 0.$$

Если $\alpha = 1$, то $K(T_0, t_1(\alpha), \delta_2, (1-\alpha)A) = 0$, поэтому на промежутке $(\alpha_2, 1]$ уравнение $K(T_0, t_1(\alpha), \delta_2, (1-\alpha)A) = K_2$ имеет единственное решение α_3. Левая часть уравнения убывает по α, поэтому α_3 можно с любой заданной точностью найти методом дихотомии. В любом случае α_3 удовлетворяет условиям леммы. #

Положим

$$f(\alpha)=(1-\alpha)e^{-\delta_2 T_0}+(\alpha-\gamma)e^{-\delta_2 t_1(\alpha)}-K_2\delta_2/A,\quad F_0=(1-\gamma)e^{-\delta_2 T_2}. \tag{6}$$

Лемма 4. Если α – допустимое решение задачи P_1, то $(1-\gamma)e^{-\delta_2 t(\alpha)}=f(\alpha)$. Ограничение $t_2(\alpha)\le T_2$ задачи P_1 эквивалентно неравенству $f(\alpha)\ge F_0$.

Доказательство. Пусть $t\ge t_1(\alpha)$. Из (1) и пункта (б) предположения 3 следует, что за период $[t_1(\alpha), t]$ застройщик получит приведенный платеж

$$K\big(t_1(\alpha),t,\delta_2,(1-\gamma)A\big)=\frac{(1-\gamma)A}{\delta_2}\left[e^{-\delta_2 t_1(\alpha)}-e^{-\delta_2 t}\right],$$

поэтому $t(\alpha)$ является решением относительно t на множестве $t\ge t_1(\alpha)$ уравнения $K(T_0, t_1(\alpha), \delta_2, (1-\alpha)A) + K(t_1(\alpha), t, \delta_2, (1-\gamma)A) = K_2$. Используя (1), перепишем это уравнение в виде

$$K_2=\frac{(1-\alpha)A}{\delta_2}\left[e^{-\delta_2 T_0}-e^{-\delta_2 t_1(\alpha)}\right]+\frac{(1-\gamma)A}{\delta_2}\left[e^{-\delta_2 t_1(\alpha)}-e^{-\delta_2 t(\alpha)}\right]=$$

$$=\frac{A}{\delta_2}\left[(1-\alpha)e^{-\delta_2 T_0}+(\alpha-\gamma)e^{-\delta_2 t_1(\alpha)}-(1-\gamma)e^{-\delta_2 t(\alpha)}\right].$$

Значит, $(1-\gamma)e^{-\delta_2 t(\alpha)}=f(\alpha)$. Поскольку $t(\alpha) = t_2(\alpha)$ в задаче P_1, условие $t_2(\alpha)\le T_2$ эквивалентно $f(\alpha)\ge F_0$. #

Леммы 2–4 делают очевидным следующий результат.

Теорема 1. Если $\max\{f(\alpha)|\alpha\in[\alpha_3,1]\}<F_0$, то задача P_1 несовместна, в противном случае $\operatorname{Arg\,min}\{t(\alpha)|\alpha\in[\alpha_3,1]\}=\operatorname{Arg\,max}\{f(\alpha)|\alpha\in[\alpha_3,1]\}$.

Таким образом, задача P_1 сводится к максимизации функции $f(\alpha)$ на отрезке $[\alpha_3, 1]$. Найдем производную:

$$f'(\alpha)=-e^{-\delta_2 T_0}+e^{-\delta_2 t_1(\alpha)}\left[1-\delta_2(\alpha-\gamma)t_1'(\alpha)\right]. \tag{7}$$

Из (3) следует, что

$$t_1'(\alpha)=-\frac{K_1}{\alpha^2 A\left(e^{-\delta_1 T_0}-K_1\dfrac{\delta_1}{\alpha A}\right)}=-\frac{K_1}{\alpha^2 A}e^{\delta_1 t(\alpha)}.$$

Подставив это выражение в (7), получим

$$f'(\alpha)=-e^{-\delta_2 T_0}+e^{-\delta_2 t_1(\alpha)}+(\alpha-\gamma)\frac{K_1\delta_2}{\alpha^2 A}e^{(\delta_1-\delta_2)t_1(\alpha)}.$$

Используя (3), для любого δ получим

$$e^{\delta t_1(\alpha)} = \left[e^{-\delta_1 T_0} - \frac{K_1 \delta_1}{\alpha A} \right]^{-\frac{\delta}{\delta_1}},$$

(выражение в квадратных скобках положительно при $\alpha > \alpha_1$). Отсюда

$$f'(\alpha) = -e^{-\delta_2 T_0} + \left(e^{-\delta_1 T_0} - \frac{K_1 \delta_1}{\alpha A} \right)^{\frac{\delta_2}{\delta_1}} + \frac{(\alpha - \gamma) K_1 \delta_2}{\alpha^2 A} \left(e^{-\delta_1 T_0} - \frac{K_1 \delta_1}{\alpha A} \right)^{\frac{\delta_2}{\delta_1} - 1} =$$
$$= -e^{-\delta_2 T_0} + \left(e^{-\delta_1 T_0} - \frac{K_1 \delta_1}{\alpha A} \right)^{\frac{\delta_2}{\delta_1} - 1} \left[\left(e^{-\delta_1 T_0} - \frac{K_1 \delta_1}{\alpha A} \right) + \frac{(\alpha - \gamma) K_1 \delta_2}{\alpha^2 A} \right]. \quad (8)$$

После замены переменной $x = 1/\alpha$ функция $f'(\alpha)$ принимает вид

$$h(x) = -e^{-\delta_2 T_0} + \left(e^{-\delta_1 T_0} - \frac{K_1 \delta_1}{A} x \right)^{\frac{\delta_2}{\delta_1} - 1} \left[\left(e^{-\delta_1 T_0} - \frac{K_1 \delta_1}{A} x \right) + \frac{K_1 \delta_2}{A} \left(x - \gamma x^2 \right) \right] =$$
$$= -e^{-\delta_2 T_0} + (C - bx)^{p-1} \left[C + bx(p-1) - \gamma b p x^2 \right],$$

где $C = e^{-\delta_1 T_0}$, $p = \delta_2/\delta_1$, $b = K_1\delta_1/A$.

Положим $x_0 = 1/\alpha_3$. Когда α растет от α_3 до 1, x убывает от x_0 до 1. Анализ функции $f'(\alpha)$ на промежутке $[\alpha_3, 1]$ эквивалентен анализу $h(x)$ на $[1, x_0]$. Мы хотим выявить промежутки монотонности функции $h(x)$. Найдем производную:

$$h'(x) = -b(p-1)(C - bx)^{p-2} \left[C + bx(p-1) - \gamma b p x^2 \right] + (C - bx)^{p-1} \left[b(p-1) - 2\gamma b p x \right] =$$
$$= bp(C - bx)^{p-2} x \left[\gamma b(p+1)x - \left(b(p-1) + 2C\gamma \right) \right].$$

Пусть $\varphi(x) = \gamma b(p + 1)x - (b(p - 1) + 2C\gamma)$, тогда $h'(x) = bpx(C - bx)^{p-2}\varphi(x)$.

Из (3) следует, что $C - bx = e^{-\delta_1 t_1(\alpha)} \in (0,1)$, поэтому знак функции $h'(x)$ на промежутке $[1, x_0]$ совпадает со знаком возрастающей линейной функции $\varphi(x)$. Промежутки знакопостоянства функций $\varphi(x)$ и $h'(x)$ на $[1, x_0]$ определяют промежутки монотонности $h(x)$ на $[1, x_0]$ и $f'(\alpha)$ – на $[\alpha_3, 1]$. Далее мы рассмотрим варианты расположения промежутков знакопостоянства функции $\varphi(x)$ на $[1, x_0]$ и, соответственно, промежутков монотонности функции $f'(\alpha)$ на $[\alpha_3, 1]$. Для каждого варианта сформируем конечное множество B_1, включающее все точки локальных максимумов функции $f(\alpha)$ на $[\alpha_3, 1]$. Если задача P_1 разрешима, то ее решение лежит в B_1.

Положим $x_1 = [b(p - 1) + 2C\gamma] / [\gamma b(p + 1)]$ и $\alpha_4 = 1 / x_1$. Функция $\varphi(x)$ отрицательна при $x < x_1$, равна нулю при $x = x_1$ и положительна при $x > x_1$.

Теорема 2. В зависимости от параметров задачи P множество B_1 локальных максимумов функции $f(\alpha)$ на $[\alpha_3, 1]$ имеет вид, указанный в табл. 1, где σ_1 в случае 1.3 – единственная стационарная точка функции $f(\alpha)$ на промежутке $[\alpha_3, 1]$

и σ_2 в случаях 3.4 и 3.5 – единственная стационарная точка этой функции на промежутке $[\alpha_3, \alpha_4]$.

Таблица 1

Точки локальных максимумов функции $f(\alpha)$ на $[\alpha_3,1]$

Table 1

The local maxima points of the function $f(\alpha)$ on $[\alpha_3,1]$

Случай	Условия случая			B_1
1.1	$x_1 \le 1$	$f'(\alpha_3) \le 0$		$\{\alpha_3\}$
1.2		$f'(1) \ge 0$		$\{1\}$
1.3		$f'(\alpha_3) > 0 > f'(1)$		$\{\sigma_1\}$
2.1	$x_1 \ge x_0$	$f'(\alpha_3) \ge 0$		$\{1\}$
2.2		$f'(1) \le 0$		$\{\alpha_3\}$
2.3		$f'(\alpha_3) < 0 < f'(1)$		$\{\alpha_3,1\}$
3.1	$x_1 \in (1, x_0)$	$f'(\alpha_3) \le 0$	$f'(1) > 0$	$\{\alpha_3,1\}$
3.2			$f'(1) \le 0$	$\{\alpha_3\}$
3.3		$f'(\alpha_4) \ge 0$		$\{1\}$
3.4		$f'(\alpha_3) > 0 > f'(\alpha_4)$	$f'(1) > 0$	$\{\alpha_2,1\}$
3.5			$f'(1) \le 0$	$\{\sigma_2\}$

Доказательство. Все случаи анализируются однотипно. Рассмотрим, например, доказательство для случая 3.4.

Из $x_1 \in (1, x_0)$ (первое условие случая) следует, что: $h'(x) < 0$ и $h(x)$ убывает на промежутке $(1, x_1)$, $h'(x) > 0$ и $h(x)$ возрастает на промежутке (x_1, x_0). Следовательно, $\alpha_4 \in (\alpha_3, 1)$, $f'(\alpha)$ убывает на (α_3, α_4) и возрастает на $(\alpha_4, 1)$. Из условия $f'(\alpha_3) > 0 > f'(\alpha_4)$ следует, что $f(\alpha)$ на промежутке (α_3, α_4) имеет единственную стационарную точку σ_2, и это точка локального максимума. Из $f'(1) > 0$ и $f'(\alpha_4) < 0$ следует, что на промежутке $(\alpha_4, 1)$ функция $f(\alpha)$ имеет единственную стационарную точку σ_3, убывает на промежутке (σ_2, σ_3) и возрастает правее σ_3. Тогда в точке 1 – локальный максимум и $B_1 = \{\sigma_2, 1\}$. #

Итак, предполагая, что выполнено условие (4), мы сформулировали способ построения множества B_1 при любом сочетании параметров задачи. Если же (4) не выполняется, то $B_1 = \varnothing$. Положим $F_1 = \max\{f(\alpha) | \alpha \in B_1\}$ (если $B_1 = \varnothing$, то $F_1 = -\infty$).

Теоремы 1 и 2 определяют M_1 – множество всех решений задачи P_1.

Следствие 1. Если $F_1 \geq F_0$, то $M_1 = \left\{\alpha \in B_1 \,\middle|\, f(\alpha) = F_1\right\}$; в противном случае $M_1 = \varnothing$ (задача P_1 несовместна).

Замечание 1. Множество B_1 включает не более двух элементов. В случаях 1.3, 3.4 и 3.5 оно содержит стационарную точку функции $f(\alpha)$, расположенную в промежутке монотонности функции $f'(\alpha)$. Метод дихотомии позволяет найти такую точку с любой заданной точностью.

2.2. Решение задачи P_2

Теперь предполагаем, что затраты застройщика окупаются не позже, чем затраты инвестора, $t_2(\alpha) \leq t_1(\alpha)$. Тогда $t(\alpha) = t_1(\alpha)$, и задача P_2 принимает вид

$$\min\left\{t_1(\alpha) \middle| \alpha \in [0,1),\, t_1(\alpha) \leq T_1,\, t_2(\alpha) \leq T_2,\, t_2(\alpha) \leq t_1(\alpha)\right\}.$$

В соответствии с пунктом (а) предположения 3, $t_2(\alpha)$ – решение относительно t уравнения

$$K_2 = K\left(T_0, t, \delta_2, (1-\alpha)A\right) = (1-\alpha)A\left(e^{-\delta_2 T_0} - e^{-\delta_2 t}\right)\Big/\delta_2,$$

откуда

$$e^{-\delta_2 t_2(\alpha)} = e^{-\delta_2 T_0} - \frac{K_2\delta_2}{(1-\alpha)A} \text{ и } t_2(\alpha) = -\frac{1}{\delta_2}\ln\left(e^{-\delta_2 T_0} - \frac{K_2\delta_2}{(1-\alpha)A}\right). \tag{9}$$

Лемма 5. Функция $t_2(\alpha)$, заданная формулой (9), определена при $\alpha \in [0, 1]$, если и только если $\alpha \in [0, \alpha_5)$, где $\alpha_5 = 1 - K_2\delta_2 e^{\delta_2 T_0}\big/A > 0$. Эта функция непрерывна, положительна и монотонно возрастает на промежутке $[0, \alpha_5)$.

Доказательство. Из (9) ясно, что функция $t_2(\alpha)$ непрерывна и возрастает в области определения. Она определена, если и только если аргумент логарифма в (9) положителен, т. е. $\alpha < \alpha_5$. Из (2) следует, что $\alpha_5 > 0$. Из $\alpha \in [0, 1]$ следует, что функция $t_2(\alpha)$ определена на непустом промежутке $[0, \alpha_5)$. Тогда

$$0 < e^{-\delta_2 t_2(\alpha)} = e^{-\delta_2 T_0} - \frac{K_2\delta_2}{(1-\alpha)} < e^{-\delta_2 T_0} < 1$$

для $\alpha \in [0, \alpha_5)$. Следовательно, $t_2(\alpha) > 0$ на промежутке $[0, \alpha_5)$. #

Лемма 6. Пусть $\alpha_6 = 1 - K_2\delta_2\Big/A\left(e^{-\delta_2 T_0} - e^{-\delta_2 T_2}\right)$. Тогда $t_2(\alpha_6) = T_2$, $\alpha_6 < \alpha_5$ и ограничение $t_2(\alpha) \leq T_2$ задачи P_2 эквивалентно $\alpha \leq \alpha_6$. Если $\alpha_6 < 0$, то задача P_2 несовместна.

Доказательство. Используя (9), легко проверить, что $t_2(\alpha_6) = T_2$. Условие $t_2(\alpha) \leq T_2$ эквивалентно $K(T_0, T_2, \delta_2, (1-\alpha)A) \geq K_2$. Учитывая (1), последнее неравенство эквивалентно $\alpha \le \alpha_6$. Значит, при $\alpha_6 < 0$ задача P_2 несовместна. Кроме того, $\alpha_6 = 1 - K_2\delta_2 / A\left(e^{-\delta_2 T_0} - e^{-\delta_2 T_2}\right) < 1 - K_2\delta_2 / Ae^{-\delta_2 T_0} = \alpha_5$. #

Учитывая лемму 6, будем далее считать, что $\alpha_6 \ge 0$, т. е.

$$K_2\delta_2 \le A\left(e^{-\delta_2 T_0} - e^{-\delta_2 T_2}\right). \tag{10}$$

Условие $t_2(\alpha) \le t_1(\alpha)$ эквивалентно неравенству

$$K\left(T_0, t_2(\alpha), \delta_1, \alpha A\right) = \frac{\alpha A}{\delta_1}\left[e^{-\delta_1 T_0} - e^{-\delta_1 t_2(\alpha)}\right] \le K_1. \tag{11}$$

Лемма 7. Существует $\alpha_7 \in [0, \alpha_6]$ такое, что для всех $\alpha \in [0, \alpha_7]$ неравенство (11) выполняется, а для $\alpha \in (\alpha_7, \alpha_6]$ не выполняется.

Доказательство. Функция $t_2(\alpha)$ возрастает на отрезке $[0, \alpha_6]$ по лемме 5. Следовательно, $K(T_0, t_2(\alpha), \delta_1, \alpha A)$ тоже возрастает по α на этом отрезке. Вспомним, что $t_2(\alpha_6) = T_2$ по лемме 6. Если $K(T_0, T_2, \delta_1, \alpha_6 A) \le K_1$, то утверждение леммы справедливо при $\alpha_7 = \alpha_6$ (в этом случае $(\alpha_7, \alpha_6] = \varnothing$). Предположим, что $K(T_0, T_2, \delta_1, \alpha_6 A) > K_1 > 0$. Так как $K(T_0, t_2(\alpha), \delta_1, \alpha A) = 0$ при $\alpha = 0$, уравнение $K(T_0, t_2(\alpha), \delta_1, \alpha A) = K_1$ имеет единственное решение α_7 на промежутке $[0, \alpha_6]$. Левая часть уравнения возрастает по α, поэтому α_7 можно с любой заданной точностью найти методом дихотомии. В любом случае α_7 удовлетворяет условиям леммы. #

Положим

$$g(\alpha) = -\frac{K_1\delta_1}{A} + \alpha e^{-\delta_1 T_0} + (1-\alpha)e^{-\delta_1 t_2(\alpha)}, \quad G_0 = e^{-\delta_1 T_1}. \tag{12}$$

Лемма 8. Если α – допустимое решение задачи P_2, то $e^{-\delta_1 t(\alpha)} = g(\alpha)$. Ограничение $t_1(\alpha) \le T_1$ задачи P_2 эквивалентно $g(\alpha) \ge G_0$.

Доказательство. В период $(t_2(\alpha), t_1(\alpha)]$, в соответствии с пунктом (в) предположения 3, всю прибыль получает инвестор. Если $t_2(\alpha) \le t \le t_1(\alpha)$, то за период $(t_2(\alpha), t]$ инвестор получит $K\left(t_2(\alpha), t, \delta_1, A\right) = A\left(e^{-\delta_1 t_2(\alpha)} - e^{-\delta_1 t}\right)/\delta_1$, поэтому $t(\alpha)$ является решением относительно t на множестве $t > t_2(\alpha)$ уравнения

$$K_1 = K\left(T_0, t_2(\alpha), \delta_1, \alpha A\right) + K\left(t_2(\alpha), t, \delta_1, A\right) = \frac{A}{\delta_1}\left[\alpha e^{-\delta_1 T_0} + (1-\alpha)e^{-\delta_1 t_2(\alpha)} - e^{-\delta_1 t}\right].$$

Отсюда

$$e^{-\delta_1 t(\alpha)} = -K_1\delta_1/A + \alpha\, e^{-\delta_1 T_0} + (1-\alpha)e^{-\delta_1 t_2(\alpha)} = g(\alpha).$$

Следовательно, условие $t_1(\alpha) \le T_1$ эквивалентно $g(\alpha) \ge G_0$. #

Из лемм 5–7 легко выводится следующий результат.

Теорема 3. Если $\max\{g(\alpha) \mid \alpha \in [0, \alpha_7]\} < G_0$, то задача P_2 несовместна, в противном случае $\operatorname{Arg\,min}\{t_1(\alpha) \mid \alpha \in [0, \alpha_7]\} = \operatorname{Arg\,max}\{g(\alpha) \mid \alpha \in [0, \alpha_7]\}$.

Найдем производную:

$$g'(\alpha)=e^{-\delta_1 T_0}-e^{-\delta_1 t_2(\alpha)}-\delta_1(1-\alpha)t_2'(\alpha)e^{-\delta_1 t_2(\alpha)}. \qquad (13)$$

Из (9) следует, что $t_2'(\alpha)=K_2e^{\delta_2 t_2(\alpha)}\big/A(1-\alpha)^2>0$. Подставив это выражение в (13), получим

$$g'(\alpha)=e^{-\delta_1 T_0}-e^{-\delta_1 t_2(\alpha)}-\frac{K_2\delta_1}{A(1-\alpha)}e^{(\delta_2-\delta_1)t_2(\alpha)}.$$

При любом δ из (9) следует, что

$$e^{\delta t_2(\alpha)}=\left[e^{-\delta_2 T_0}-\frac{K_2\delta_2}{(1-\alpha)A}\right]^{-\frac{\delta}{\delta_2}},$$

поэтому

$$g'(\alpha)=e^{-\delta_1 T_0}-\left[e^{-\delta_2 T_0}-\frac{K_2\delta_2}{A(1-\alpha)}\right]^{\frac{\delta_1}{\delta_2}}-\frac{K_2\delta_1}{A(1-\alpha)}\left[e^{-\delta_2 T_0}-\frac{K_2\delta_2}{A(1-\alpha)}\right]^{\frac{\delta_1}{\delta_2}-1}.$$

После очевидных преобразований

$$g'(\alpha)=e^{-\delta_1 T_0}-\left[e^{-\delta_2 T_0}-\frac{K_2\delta_2}{A(1-\alpha)}\right]^{\frac{\delta_1}{\delta_2}-1}\left[e^{-\delta_2 T_0}-\frac{K_2(\delta_2-\delta_1)}{A(1-\alpha)}\right]. \qquad (14)$$

Легко проверить, что выражение в первых квадратных скобках положительно при $\alpha\in[0,\alpha_5)$.

Сделаем замену переменной $x = 1/(1-\alpha)$. Когда α растет от 0 до α_7, x растет от 1 до $x_0 = 1/(1-\alpha_7)$. Функция $g'(\alpha)$ принимает вид

$$h(x)=e^{-\delta_1 T_0}-\left(e^{-\delta_2 T_0}-\frac{K_2\delta_2}{A}x\right)^{\frac{\delta_1}{\delta_2}-1}\left[e^{-\delta_2 T_0}-\frac{K_2(\delta_2-\delta_1)}{A}x\right]=$$
$$=e^{-\delta_1 T_0}-\left(e^{-\delta_2 T_0}-bx\right)^q\left(e^{-\delta_2 T_0}+bqx\right),$$

где $q=\delta_1/\delta_2-1$ и $b=K_2\delta_2/A$. Найдем производную функции $h(x)$:

$$h'(x)=bq\left(e^{-\delta_2 T_0}-bx\right)^{q-1}\left(e^{-\delta_2 T_0}+bqx\right)-bq\left(e^{-\delta_2 T_0}-bx\right)^q=$$
$$=b^2q(q+1)x\left(e^{-\delta_2 T_0}-bx\right)^{q-1}.$$

Далее мы для каждого набора параметров задачи P построим множество B_2 всех локальных максимумов функции $g(\alpha)$ на $[0, \alpha_7]$. Если задача P_2 разрешима, то ее решение лежит в B_2.

Теорема 4. В зависимости от параметров задачи P множество B_2 имеет вид, указанный в табл. 2, где λ в случае 2.3 – единственная стационарная точка функции $g(\alpha)$ на $(0, \alpha_7)$.

Таблица 2

Точки локальных максимумов функции $g(\alpha)$ на $[0, \alpha_7]$

Table 2

The local maxima points of the function $g(\alpha)$ on $[0, \alpha_7]$

Случай	Условия случая		B_2
1.1	$\delta_2 < \delta_1$	$g'(0) \geq 0$	$\{\alpha_7\}$
1.2		$g'(\alpha_7) \leq 0$	$\{0\}$
1.3		$g'(0) < 0 < g'(\alpha_7)$	$\{0, \alpha_7\}$
2.1	$\delta_2 > \delta_1$	$g'(0) \leq 0$	$\{0\}$
2.2		$g'(\alpha_7) \geq 0$	$\{\alpha_7\}$
2.3		$g'(0) > 0 > g'(\alpha_7)$	$\{\lambda\}$
3	$\delta_2 = \delta_1$		$[0, \alpha_7]$

Доказательство. Во всех случаях, кроме случая 3, доказательства аналогичны, поэтому здесь приведем доказательства только для случаев 1.3 и 3.

В случае 1.3 имеем $\delta_2 < \delta_1$. Тогда $q > 0$, $h'(x) > 0$ для всех $x \in [1, x_0]$ и $g'(\alpha)$ возрастает на $[0, \alpha_7]$. По условию случая $g'(0) < 0$ и $g'(\alpha_7) > 0$, поэтому существует единственная точка $\sigma \in (0, \alpha_7)$ такая, что $g'(\sigma) = 0$. Это точка минимума функции $g(\alpha)$, а локальные максимумы функции расположены на концах промежутка $[0, \alpha_7]$.

В случае 3, при $\delta_2 = \delta_1 = \delta$, используя (9), получаем

$$g(\alpha) = -\frac{K_1\delta}{A} + \alpha e^{-\delta T_0} + (1-\alpha)e^{-\delta t_2(\alpha)} = e^{-\delta T_0} - \frac{\delta(K_1 + K_2)}{A}.$$

Поскольку $g(\alpha)$ не зависит от α, $B_2 = [0, \alpha_7]$. #

При любых значениях параметров задачи, удовлетворяющих условию (10), теорема 4 указывает множество B_2. Если (10) не выполняется, то $B_2 = \varnothing$.

Замечание 2. В случае 2.3 множество B_2 включает точку λ, которая является единственной стационарной точкой функции $g(\alpha)$ и расположена в промежутке монотонности функции $g'(\alpha)$. Метод дихотомии позволяет найти эту точку с любой заданной точностью.

Положим $F_2 = \max\{g(\alpha) \mid \alpha \in B_2\}$ (если $B_1 = \varnothing$, то $F_2 = -\infty$). Если реализовался случай 3, то $F_2 = g(\alpha)$ для любого $\alpha \in [0, \alpha_7]$.

Теорема 3 позволяет описать множество M_2 всех решений задачи P_2.

Следствие 2. Если $F_2 \geq G_0$, то $M_2 = \{\alpha \in B_2 \mid g(\alpha) = F_2\}$, в противном случае задача P_2 несовместна, $M_2 = \varnothing$.

3. Алгоритм решения задачи *P*

Выполненный в предыдущем разделе анализ обосновывает алгоритм решения исходной задачи P. Описанные ниже шаги этого алгоритма выполняются в порядке номеров за исключением случаев, когда в явном виде указан номер следующего шага или конец процедуры.

Вход: параметры A, T_0, γ, K_1, K_2, δ_1, δ_2, T_1, T_2.

Выход: множество M всех решений задачи P.

1. Проверяем условие (2). Если оно не выполняется, то задача P несовместна, конец процедуры.

2. Проверяем условие (4). Если оно не выполняется, то задача P_1 несовместна, полагаем $M_1 = \varnothing$ и переходим к шагу 7.

3. Вычисляем $\alpha_2 = K_1\delta_1 \big/ A\left(e^{-\delta_1 T_0} - e^{-\delta_1 T_1}\right)$ и находим $K\left(T_0, T_1, \delta_2, \left(1-\alpha_2\right)A\right)$ по формуле (1). Если $K\left(T_0, T_1, \delta_2, \left(1-\alpha_2\right)A\right) \le K_2$, полагаем $\alpha_3 = \alpha_2$. Иначе, используя (5), находим α_3 с требуемой точностью методом дихотомии как единственное решение уравнения $K\left(T_0, T_1, \delta_2, \left(1-\alpha_2\right)A\right) = K_2$ на промежутке $(\alpha_2, 1]$, см. доказательство леммы 3. Вычисляем $x_0 = 1/\alpha_3$.

4. Находим $x_1 = [b(p - 1) + 2C\gamma]/[\gamma b(p + 1)]$, где $b = K_1\delta_1/A$, $C = e^{-\delta_1 T_0}$ и $p = \delta_2/\delta_1$. Полагаем $\alpha_4 = 1/x_1$. По формуле (8) вычисляем значения функции $f'\left(\alpha\right)$ в точках α_3, α_4 и 1.

5. По табл. 1 определяем множество B_1. Если реализовался случай 1.3 или один из случаев 3.4, 3.5, то точку σ_1 или, соответственно, σ_2 вычисляем с требуемой точностью методом дихотомии как единственное решение уравнения $f'\left(\alpha\right) = 0$ на промежутке монотонности функции $f'\left(\alpha\right)$ (это отрезок $[\alpha_3, 1]$ в случае 1.3 и $[\alpha_3, \alpha_4]$ – в случаях 3.4, 3.5). Используя формулы (6) и (3), находим $F_1 = \max\left\{f\left(\alpha\right) \middle| \alpha \in B_1\right\}$ ($F_1 = -\infty$, если $B_1 = \varnothing$).

6. Найдем $F_0 = \left(1-\gamma\right)e^{-\delta_2 T_2}$. Если $F_1 \ge F_0$, то положим

$$M_1 = \left\{\alpha \in B_1 \middle| f\left(\alpha\right) = F_1\right\},$$

иначе $M_1 = \varnothing$.

7. Вычисляем $\alpha_6 = 1 - K_2\delta_2 \big/ A\left(e^{-\delta_2 T_9} - e^{-\delta_2 T_2}\right)$. Если $\alpha_6 < 0$, то полагаем $M_2 = \varnothing$ и переходим к шагу 12.

8. Вычисляем $K(T_0, T_2, \delta_1, \alpha_6 A)$ по формуле (1). Если $K(T_0, T_2, \delta_1, \alpha_6 A) \le K_1$, то положим $\alpha_7 = \alpha_6$. В противном случае, используя (9) и (11), находим α_7 с требуемой точностью методом дихотомии как единственное решение уравнения $K(T_0, t_2(\alpha), \delta_1, \alpha A) = K_1$ на промежутке $[0, \alpha_6]$, см. доказательство леммы 7.

9. По формуле (14) вычисляем $g'(0)$ и $g'(\alpha_7)$, затем по табл. 2 определяем множество B_2. В случае 2.3, используя формулу (14), находим λ с требуемой

точностью методом дихотомии как единственное решение уравнения $g'(\alpha) = 0$ на промежутке $[0, \alpha_7]$.

10. Применяя формулы (12) и (9), вычисляем $F_2 = \max\{g(\alpha) \mid \alpha \in B_2\}$ ($F_2 = -\infty$, если $B_2 = \varnothing$).

11. Находим $G_0 = e^{-\delta_1 T_1}$. Если $F_2 \geq G_0$, полагаем $M_2 = \{\alpha \in B_2 \mid g(\alpha) = F_2\}$, иначе $M_2 = \varnothing$.

12. Учитывая леммы 4 и 8, положим

$$\tau_1 = \begin{cases} -\dfrac{1}{\delta_2}\ln\dfrac{F_1}{1-\gamma}, \text{ если } M_1 \neq \varnothing, \\ +\infty, \text{ если } M_1 = \varnothing; \end{cases} \qquad \tau_2 = \begin{cases} -\dfrac{1}{\delta_2}\ln F_2, \text{ если } M_2 \neq \varnothing, \\ +\infty, \text{ если } M_2 = \varnothing. \end{cases}$$

Найдем $t^* = \min\{\tau_1, \tau_2\}$. Если $t^* = +\infty$, то задача P несовместна, иначе t^* – минимальное значение целевой функции в задаче P. В последнем случае оптимальными решениями задачи P являются элементы множества M_1, если $t^* = \tau_1$, и элементы множества M_2, если $t^* = \tau_2$.

Конец процедуры.

4. Об учете рисков проекта

Склонность фирм к участию в инвестиционных проектах и, следовательно, приемлемые для них размеры инвестиций, уровни доходности и сроки окупаемости проектов существенно зависят от величины рисков. Для инвестиций в недвижимость это показано в работе [7]. Модель, описанная в разд. 1, не учитывает риски в явном виде, поэтому обсудим возможности компенсации важнейших рисков, специфических для проектов рассматриваемого типа.

1. Риск нарушения планового срока строительства объекта. Если объект вовремя не сдан в эксплуатацию, участники проекта теряют начальный отрезок планового потока доходов. Чтобы возместить этот ущерб (полностью или частично), достаточно в договоре застройщика с подрядчиком указать срок завершения строительства и предусмотреть штраф за превышение этого срока. Симметрично, ускорение строительства увеличивает доходы инвестора и застройщика, поэтому часть потенциального дополнительного дохода целесообразно использовать как стимул для сокращения срока строительства (при надлежащем качестве строительства и соблюдении договорных характеристик объекта). Правильно составленный договор с подрядчиком сводит рассматриваемый риск к приемлемому уровню.

2. Риск недобросовестного поведения застройщика на этапе эксплуатации объекта. Этот риск возникает для инвестора, если застройщик распоряжается денежными потоками так, чтобы быстрее окупить свои затраты, следствием чего может быть невыполнение требований инвестора к доходности и сроку окупаемости вложений. Существенно защищает инвестора договор с застройщиком, если включить в него план распределения прибыли, гарантирующий выполнение требований инвестора (например, план, полученный с помощью описанной выше модели).

3. Риск неполучения плановой прибыли. Это главный риск проекта. Никакое распределение прибыли не позволит своевременно и с достаточной доходностью окупить затраты участников, если объект не генерирует планируемую прибыль. Соответственно, ключевым параметром модели является величина A – плотность потока прибыли от эксплуатации объекта. Это ожидаемое или прогнозируемое значение случайной величины, которая с ненулевой вероятностью может принимать значения, меньшие A. Осознавая риск снижения прибыли, потенциальный участник проекта сочтет его приемлемым только при повышенной (по сравнению с безрисковым вложением) доходности. Применительно к нашей модели это значит, что участник i выберет в качестве δ_i ставку дисконтирования, скорректированную на риск, см. [8, ch. 17], добавляя некоторую премию за риск к ставке дисконтирования для безрискового вложения. Это соответствует методике RADR (Risk Adjusted Discount Rate), описанной в статье [9]. Основные подходы к оценке премии за риск описаны в работах [4, p. 67–76; 10, p. 117–126; 11].

Заключение

Предшествующий анализ относится к этапу переговоров между потенциальными участниками инвестиционного проекта – инвестором и застройщиком. Во многих случаях инвестор является инициатором проекта и полностью его финансирует, а застройщик получает фиксированную оплату. Мы рассматриваем другую, тоже часто встречающуюся ситуацию: застройщик инициирует проект, частично его финансирует и ищет для него соинвестора. В такой ситуации, чтобы привлечь инвестора, застройщик должен предложить вариант распределения прибыли, демонстрирующий выгодность проекта. В статье описан метод построения такого распределения прибыли.

Точнее, обоснован простой алгоритм решения следующей задачи оптимизации: найти распределение прибыли, минимизирующее максимум из сроков окупаемости затрат участников и удовлетворяющее их требованиям к доходности и срокам окупаемости затрат. Алгоритм либо находит решение задачи, либо обнаруживает ее неразрешимость. Неразрешимость задачи означает, что проект неприемлем хотя бы для одного из участников. Следовательно, в процессе реализации алгоритма происходит проверка целесообразности проекта.

Используя предложенный подход, застройщик может оценить реализуемость и выгодность проекта, упростить и сделать более эффективными переговоры с инвестором. Рассмотрение «ступенчатых» схем распределения прибыли расширяет множество ситуаций, в которых можно найти приемлемую для обоих участников схему и, следовательно, расширяет множество реализуемых проектов.

Список литературы

1. **Мулен Э.** Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991. 464 с.
2. **Rosenbleeth C. W.** Exploring joint ventures in real estate transactions. *Real Estate Finance Journal*, 2008, Spring issue, pp. 14–18.

3. **Фридман Дж., Ордуэй Н.** Анализ и оценка приносящей доход недвижимости. М.: Дело ЛТД, 1995. 480 с.
4. **Damodaran A.** Applied corporate finance. Fourth edition. Hoboken, John Wiley & Sons, 2014, 654 p.
5. **Frederick S., Loewenstein G., O'Donoghue T.** Time discounting and time preference: a critical review. *Journal of Economic Literature*, 2002, vol. 40, no. 2, pp. 351–401.
6. **Кириллов Ю. В., Назимко Е. Н.** Экономико-математический подход к вычислению срока окупаемости инвестиционного проекта // Экономический анализ: теория и практика. 2012. № 45. С. 49–54.
7. **Deng X., Ong S. E., Qian M.** Real estate risk, corporate investment and financing choice. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 2018, vol. 57, pp. 87–113.
8. **Peleg D.** Fundamental models in financial theory. Cambridge, MIT Press, 2014, 492 p.
9. **Nippani S.** Why the risk-adjusted discount rate method is a better method than the certainty equivalent method: a teaching perspective. *Afro-Asian Journal of Finance and Accounting*, 2017, vol. 7, pp. 147–163.
10. **Dayananda D., Irons R., Harrison S., Herbohn J., Rowland P.** Capital budgeting: financial appraisal of investment projects. Cambridge, Cambridge Uni. Press, 2002, 348 p.
11. **Бласет К. А., Кулаков Н.** Применение метода RADR для рискованных оттоков денежных средств // Корпоративные финансы. 2018. Т. 2, № 4. С. 61–70.

References

1. **Moulin H.** Axioms of the Cooperative Decision Making. Cambridge, Cambridge Uni. Press, 1988, 348 p.
2. **Rosenbleeth C. W.** Exploring joint ventures in real estate transactions. *Real Estate Finance Journal*, 2008, Spring issue, pp. 14–18.
3. **Friedman J. P., Ordway N.** Income property appraisal and analysis. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1989, 490 p.
4. **Damodaran A.** Applied corporate finance. Fourth edition. Hoboken, John Wiley & Sons, 2014, 654 p.
5. **Frederick S., Loewenstein G., O'Donoghue T.** Time discounting and time preference: a critical review. *Journal of Economic Literature*, 2002, vol. 40, no. 2, pp. 351–401.
6. **Kirilov Yu. V., Nazimko E. N.** Economic-mathematical approach to calculating the payback period of an investment project. *Economic Analysis: theory and practice*, 2012, no. 45, pp. 49–54. (in Russ.)
7. **Deng X., Ong S. E., Qian M.** Real estate risk, corporate investment and financing choice. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 2018, vol. 57, pp. 87–113.
8. **Peleg D.** Fundamental models in financial theory. Cambridge, MIT Press, 2014, 492 p.

9. **Nippani S.** Why the risk-adjusted discount rate method is a better method than the certainty equivalent method: a teaching perspective. *Afro-Asian Journal of Finance and Accounting*, 2017, vol. 7, pp. 147–163.
10. **Dayananda D., Irons R., Harrison S., Herbohn J., Rowland P.** Capital budgeting: financial appraisal of investment projects. Cambridge, Cambridge Uni. Press, 2002, 348 p.
11. **Blaset K. A., Kulakov N.** An application of the RADR method for risky cash outflows. *Journal of Corporate Finance Research*, 2018, vol. 2, no. 4, pp. 61–70. (in Russ.)

Информация об авторах

Александр Юрьевич Сафонкин, старший дата-аналитик
Александр Борисович Хуторецкий, доктор экономических наук, профессор
SPIN 9275-2232

Information about the Authors

Alexandr Yu. Safonkin, senior data analyst
Alexandr B. Khutoretsky, Doctor of Sciences (Economics), Associate Professor
SPIN 9275-2232

Статья поступила в редакцию 03.02.2022;
одобрена после рецензирования 25.03.2022; *принята к публикации 25.03.2022*
The article was submitted 03.02.2022;
approved after reviewing 25.03.2022; *accepted for publication 25.03.2022*