

И. Н. Антонов, А. Г. Князев, О. А. Лепёхин

*Астраханский государственный университет
ул. Татищева, 20а, Астрахань, 414056, Россия*

*antonovilya1994@gmail.com, agkniazev@mail.ru
okmb07@yandex.ru*

КОПУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ СОВМЕСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КУРСОВ ВАЛЮТ *

Исследуется совместное распределение курсов иностранных валют с помощью НАС, НКС и Vine (ветвящихся) копул в рамках нескольких временных периодов. При построении моделей использовались архимедовы копулы Гамбела – Хаугарда, Джо BB1 и Франка, а их параметры оценивались методом максимального правдоподобия. Наилучшие модели были построены с помощью иерархических архимедовых копул, а наихудшие представлены ветвящимися копулами. В сравнении с НАС главным преимуществом иерархических Кендалловых копул стала возможность использования двухпараметрической копулы Джо BB1. Наиболее часто лучшие модели были получены с помощью копулы Франка, а копула Гамбела – Хаугарда отличилась только в третьем периоде. Помимо этого в статье строится прогноз значений курсов валют с использованием алгоритмов Кендалла и Маршалла – Олкина. Наиболее точный прогноз был получен для евро и швейцарского франка с помощью копулы Гамбела – Хаугарда.

Ключевые слова: архимедовы копулы, валюты, копула Гамбела – Хаугарда, копула Джо BB1, копула Франка, метод Кендалла, метод Маршалла – Олкина, прогноз, НАС, НКС, Vine.

Введение

Финансовый кризис 2008 г. и современное состояние мировой экономики наглядно демонстрируют важность правильной оценки рыночных рисков и моделирования совместного распределения финансовых активов. В данном контексте часто используются эллиптические и архимедовы копулярные функции, однако на практике мы сталкиваемся с тем, что зачастую они распространяют одинаковую степень зависимости на все объединяемые элементы. Главным решением данной проблемы является использование моделей с гибкой структурой, позволяющей учитывать связь между частными функциями распределения. Таким образом, целью настоящей работы является исследование совместного распределения курсов валют с использованием НАС (Hierarchical Archimedean Copulas), НКС (Hierarchical Kendall Copulas) и Vine (ветвящихся) копул. Для достижения данной цели необходимо решить следующие задачи.

1. Сформировать четырехмерные НАС, НКС и ветвящиеся копулы и сравнить их между собой.
2. Проанализировать устойчивость построенных моделей в разрезе нескольких временных периодов.

* Авторы выражают благодарность профессору университета Св. Томаса (Миннесота, США) А. Е. Шемякину за полезное обсуждение результатов статьи.

3. Построить прогноз значений курсов валют.

Проведенное исследование показало, что иерархические архимедовы копулы значительно превосходят НКС и ветвящиеся копулы в каждом периоде. При этом период кризиса был лучше описан с помощью копулы Гамбела – Хаугарда в связи с увеличением степени связи между значениями курсов валют. Худшие показатели продемонстрировали ветвящиеся копулы, главными недостатками которых являются сложность определения структуры и учета параметров модели на каждом уровне. Основным преимуществом НКС копул перед НАС стала возможность использования двухпараметрической копулы Joe BB1.

Генерирование новых прогнозных значений курсов валют происходило при помощи методов Кендалла и Маршалла – Олкина. Наилучшие прогнозы были получены с помощью копул Гамбела – Хаугарда, построенных по данным за период 11.01.2012 – 19.09.2015. При этом определить, какой метод оказался лучшим, не представляется возможным, так как результаты оказались нестабильны и характеризовались низкой точностью.

Методология исследования. Копулярные модели

Копулярные модели представляют собой многомерные функции распределения, которые позволяют описывать зависимость между рассматриваемыми случайными величинами и их совместное поведение. Использование копул основывается на теореме Шкляра, которая утверждает, что любое многомерное распределение может быть представлено в виде копулы и набора частных функций распределения. Таким образом, в рамках данной модели от нас требуется подобрать не только копулу, описывающую структуру зависимости, но и определить вид частного распределения для каждой случайной переменной.

Существует множество классов копул, основными из которых являются эллиптические, экстремальные и архимедовы [1]. В работе все расчеты будут проводиться на основе последнего класса и, в частности, при помощи копул Гамбела – Хаугарда, Франка и Joe BB1. Первые две копулы хорошо известны [2], поэтому рассмотрим только строение копулы Joe BB1 [3]. Ее функцией-генератором является композиция генераторов $\phi_\alpha = \phi(t^\alpha)$ и $\phi_\beta = (\phi(t))^\beta$, при условиях, что $\phi(t) = t^{-1} - 1$, $\alpha > 0$ и $\beta \geq 1$:

$$\phi_{\alpha,\beta}(t) = (\phi_\alpha \circ \phi_\beta)(t) = (t^{-\alpha} - 1)^\beta.$$

Обратная генерирующая функция $\phi_{\alpha,\beta}^{-1}(t) = \left(1 + t^{\frac{1}{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$. Таким образом, копула Joe BB1 для двухмерного случая имеет вид

$$C(u, v) = \left[1 + ((u^{-\alpha} - 1)^\beta + (v^{-\alpha} - 1)^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Подобная модель с двумя параметрами обладает определенной гибкостью и позволяет нам учитывать верхние λ_U и нижние λ_L хвостовые зависимости. При этом важно отметить, что в частных случаях копула BB1 может представлять другие однопараметрические семейства архимедовых копул. Так, при фиксировании параметра $\beta = 1$ мы получаем семейство копул Клейтона, а в случае $\alpha \rightarrow 0$ – семейство копул Гамбела – Хаугарда. Краткие характеристики копул, используемых в данной работе, приведены в табл. 1. При использовании таких копулярных функций мы сталкиваемся с тем, что многомерные модели зависимости ограничены, поскольку в большинстве случаев имеют только один параметр и симметричны относительно перестановок аргументов [4; 5]. С увеличением размерности данная проблема приобретает больший вес, что в итоге побуждает нас искать другие способы формирования многомерных моделей.

Одним из способов преодолеть описанный недостаток являются иерархические архимедовы копулы (НАС, Hierarchical Archimedean Copulas), которые были впервые предложены в работе [3]. В рамках данной модели, вместо того чтобы использовать один генератор копула-функции, мы формируем иерархическую структуру, в которой частные функции распределения и копулы связываются в подгруппы на различных уровнях. Такой гибкий подход обуславливает возможность создавать структуры произвольной сложности, что наряду с простотой расчета является основным преимуществом НАС.

Таблица 1

Характеристики копулярных моделей

Копула	Ограничения параметров	Формула	λ_L	λ_U
Гамбела – Хаугарда	$\beta \geq 1$	$C(u_1, \dots, u_n) = \exp \left[- \left(\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\beta \right)^{1/\beta} \right]$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\beta}}$
Франка	$\theta \in \mathbb{R}$	$C(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right]$	0	0
Джoe BB1	$\alpha > 0; \beta \geq 1$	$C(u_1, \dots, u_n) = \left[1 + \left(\sum_{i=1}^n (u_i^{-\alpha} - 1)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$	$2^{-\frac{1}{\alpha\beta}}$	$2 - 2^{\frac{1}{\beta}}$

Общая форма двухуровневой иерархической копулы может быть представлена следующим образом [6]:

$$C^p \left(C^{sp_1}(u_{11}, \dots, u_{1n_1}), \dots, C^{sp_m}(u_{m1}, \dots, u_{mn_m}) \right).$$

Копулы C^{sp_j} , где $j = 1, \dots, m$, представляют нижний уровень иерархии и связывают случайные переменные в отдельные подгруппы, тем самым определяя свойства зависимости внутри них (при этом каждая переменная может рассматриваться как одномерная копула). Верхний уровень иерархии C^p объединяет подгруппы и задает тип связи между ними. Такое строение копулы представляет собой частично-вложенный вид иерархической копулы, когда на каждом внутреннем уровне присутствуют два или более элементов. В случае агрегирования на каждом уровне по одному новому элементу, иерархическая копула соответствует полностью вложенному типу [7].

Однако, несмотря на все положительные стороны иерархических архимедовых копул, существуют определенные проблемы, которые ограничивают их использование на практике. Первая связана непосредственно с моделированием НАС, а именно определением ее структуры. Данный этап наиболее важен, так как от него в итоге будет зависеть качество как самой модели, так и результатов, полученных с ее помощью. На данный момент не существует единого мнения, каким механизмом следует руководствоваться при формировании уровней иерархии и распределении элементов. Наиболее формализованным подходом считается агрегирование элементов в группы с наибольшей связью. Такой метод используется, к примеру, в работе [5]. Но даже в этом случае всегда присутствует вариативность структурирования, и конечный вид НАС принимает на основе собственных суждений автора или целей исследования.

Следующая проблема связана с необходимым свойством – вполне монотонностью функции. Если $\psi_1, \dots, \psi_d$ – генераторы архимедовой копулы и производная выражения $\psi_k^{-1} \circ \psi_{k+1}$ вполне монотонна при $k = 1, \dots, d - 1$, тогда следующая функция является копулой [8]:

$$C_d(u_1, \dots, u_{d+1}; \psi_1, \dots, \psi_d) = \psi_1 \left(\psi_1^{-1}(u_1) + \psi_1^{-1} \left(C_{d-1}(u_2, \dots, u_{d+1}; \psi_2, \dots, \psi_d) \right) \right).$$

Для четырехмерного случая функция имеет вид

$$C_d(u_1, u_2, u_3, u_4) = \psi_1 \left(\psi_1^{-1} \circ \psi_2 \left(\psi_2^{-1}(u_1) + \psi_2^{-1}(u_2) \right) + \psi_1^{-1} \circ \psi_3 \left(\psi_3^{-1}(u_3) + \psi_3^{-1}(u_4) \right) \right).$$

Как правило, такое условие совместимости трудно проверить, за исключением некоторых особых случаев, таких как копулы Гамбела, Клейтона и Франка, что отчасти объясняет их популярность в приложениях к иерархическим копулам. Выполнение необходимого свойства достигается при соблюдении определенного соотношения между параметрами внутренних и внешних копул. Для трех перечисленных копул, к примеру, требуется, чтобы на каждом последующем внешнем уровне параметры были меньше, чем на предыдущем. Следует также отметить, что существует возможность комбинирования в НАС нескольких семейств архимедовых копул. Это может потребоваться для повышения точности модели или сочетания

определенных свойств распределений. Данный подход применяется довольно редко в связи с описанной ранее проблемой. Помимо этого, зачастую условие вполне монотонности не выполняется ни при каких значениях параметров копул, как в случае сочетания копул Клейтона и Гамбела [7].

Преодолеть описанные проблемы можно с использованием иерархических Кендалловых копул (НКС, Hierarchical Kendall Copulas). Новый класс копул впервые был описан в работе [9]. Как и НАС, иерархические Кендалловы копулы позволяют распределять переменные по нескольким группам, после чего последовательно связывать их при помощи копулярных функций на разных иерархических уровнях. Основное отличие НКС от НАС состоит в том, что они не ограничивают нас в выборе копулярных моделей и параметров к ним. Центральную роль в НКС выполняет функция распределения Кендалла $K^{(d)}$, изученная для двумерного случая в работе [10] и позднее для трехмерного в [11]. Она имеет следующий вид:

$$K^{(d)}(t) = P(C(U_1, \dots, U_d) \leq t), \quad t \in [0, 1].$$

В частности, для парных архимедовых копул функция распределения Кендалла выглядит следующим образом [10; 12]:

$$K(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}.$$

Функции распределения Кендалла для двумерных копул Гамбела – Хаугарда, Франка и Joe BB1, которые будут использоваться в дальнейшем, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Функции распределения Кендалла	
Копула	Формула
Гамбела – Хаугарда	$K(t) = t(1 - \frac{1}{\beta} \ln t)$
Франка	$K(t) = t + \frac{(1 - e^{\theta t})}{\theta} \ln \left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)$
Joe BB1	$K(t) = t(1 + \frac{1 - t^\alpha}{\alpha\beta})$

Другим способом преодолеть главные недостатки многомерных копул является использование модели R-vine [13]. В основе принципа построения копул данного типа лежит структура, в которой мы последовательно связываем условно независимые парные копулы при помощи условных функций распределения:

$$F(x_1, \dots, x_n | y_1, \dots, y_p) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n) | y_1, \dots, y_p).$$

В зависимости от подхода к разложению плотности R-vine копула может быть построена несколькими способами [14]. В нашем исследовании использовались C-vine и D-vine модели. Преимуществом первого типа является возможность разместить в корне модели элемент, который имеет наиболее тесную связь с другими переменными. С другой стороны, D-vine копула не отдает предпочтение и более важную роль одному или нескольким элементам, позволяя нам самим выбирать порядок их расположения. Такой подход, как и в иерархических копулах, может использоваться для сочетания элементов с сильной связью. Плотность четырехмерной C-vine копулы с элементом x_4 в корне и центральной связкой $C_{34}(F(x_3), F(x_4))$:

$$\begin{aligned} c(x_1, x_2, x_3, x_4) = & c_{14}(F(x_1), F(x_4)) * c_{24}(F(x_2), F(x_4)) * c_{34}(F(x_3), F(x_4)), \\ & * c_{13|4}(F(x_1|x_4), F(x_3|x_4)) * c_{23|4}(F(x_2|x_4), F(x_3|x_4)), \\ & * c_{12|34}(F(x_1|x_3, x_4), F(x_2|x_3, x_4)). \end{aligned}$$

Плотность четырехмерной D-vine копулы:

$$\begin{aligned} c(x_1, x_2, x_3, x_4) = & c_{12}(F(x_1), F(x_2)) * c_{23}(F(x_2), F(x_3)) * c_{34}(F(x_3), F(x_4)), \\ & * c_{13|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)) * c_{24|3}(F(x_2|x_3), F(x_4|x_3)), \\ & * c_{14|23}(F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3)). \end{aligned}$$

Стоит заметить, что в случае трехмерной модели C-vine и D-vine копулы будут иметь идентичное строение, поэтому различие плотностей наблюдается только при размерности $n > 3$. Плотность в данном случае имеет следующий вид:

$$c(x_1, x_2, x_3) = c_{12}(F(x_1), F(x_2)) * c_{23}(F(x_2), F(x_3)) * c_{13|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2))$$

Общий трехмерный случай графически представлен на рис. 1.

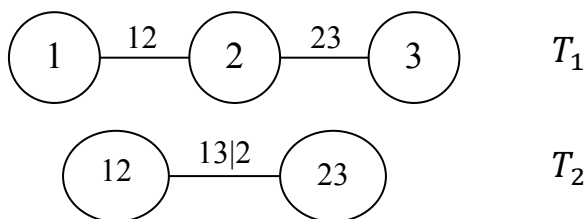


Рис. 1. Трехмерная R-vine копула

Оценивание такого вида копул происходит поэтапно, начиная с парных копул C_{12} и C_{23} первого уровня T_1 и продолжая условной парной копулой $C_{13|2}$ уровня T_2 .

Первичная обработка данных и построение парных копулярных моделей

Исходные данные в статье представлены курсами четырех иностранных валют по отношению к рублю: британского фунта стерлингов (GBP), доллара США (USD), евро (EUR) и швейцарского франка (CHF). Выбор в пользу данного набора валют был сделан на основе показателей оборота валютного межбанковского кассового рынка РФ за 2015 г., публикуемых ЦБ РФ. Согласно этим данным перечисленные валюты на протяжении всего года имели самые высокие значения объема оборота. Использовались следующие выборки ежедневных котировок валют:

- 1) с 11 января 2012 г. по 19 сентября 2015 г., $n = 916$;
- 2) с 11 января 2012 г. по 30 сентября 2014 г., $n = 677$;
- 3) с 1 октября 2014 г. по 19 сентября 2015 г., $n = 239$.

Динамика обменных курсов за общий рассматриваемый период представлена на рис. 2. Таким образом, первая выборка включает в себя все наблюдения, вторая представляет собой наиболее спокойный период, а третья – волатильный.

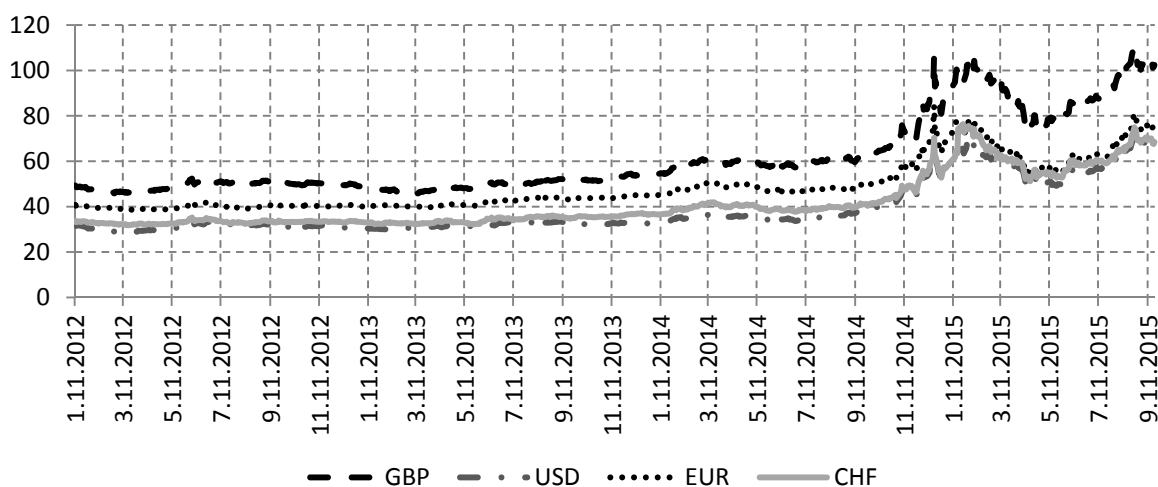


Рис. 2. Динамика курсов валют в период с 11.01.2012 по 19.09.2015

Первичная обработка данных включала в себя несколько этапов. Прежде всего было выполнено центрирование путем перехода к логарифмическим доходностям, что позволило устранить как эффект масштаба, так и возможный тренд:

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1} \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

где P_t – значение курса валюты в момент времени t .

Как правило, в финансовых показателях присутствуют авторегрессия и гетероскедастичность, что, в свою очередь, требует провести дальнейшую обработку данных. Поэтому далее был проведен подбор авторегрессионной модели первого порядка с условной гетероскедастичностью $AR(1) - GARCH(1,1)$. Модель $AR(1)$ задается уравнением $r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$, где r_t – доходность каждой из валют в момент времени t , ε_t – белый шум, не коррелируемый со значением r_{t-1} , α_0 и α_1 – коэффициенты модели. Модель $GARCH(1,1)$ задается уравнением $h_t = \beta_0 + \beta_1 h_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-1}^2$, где h_t – условная дисперсия в момент времени t ; β_0 , β_1 и β_2 – коэффициенты модели.

В качестве последнего этапа первичной обработки данных было проведено нормирование рядов остатков авторегрессии. Данное преобразование позволило перейти к анализу случайной составляющей временных рядов валютных курсов – белому шуму:

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}$$

Переходя непосредственно к формированию копулярных моделей, следует отметить, что существует несколько способов их оценивания, которые могут быть проклассифицированы по следующим категориям: параметрические, полупараметрические и непараметрические. В нашем исследовании использовался метод максимального правдоподобия, соответствующий первой группе. Он предполагает одновременную параметризацию как частных распределений, так и копулярных функций. Для моделирования одномерных распределений рядов остатков было решено использовать асимметричное распределение Стьюдента, так как финансовые переменные характеризуются более тяжелыми хвостами по сравнению с нормальным распределением [15]. Плотность имеет следующий вид:

$$f(z_i; \lambda; \eta) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\eta - 2} \left(\frac{bz + a}{1 - \lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{\eta+1}{2}}, & z < -a/b \\ bc \left(1 + \frac{1}{\eta - 2} \left(\frac{bz + a}{1 + \lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{\eta+1}{2}}, & z \geq -a/b \end{cases}$$

где $a = 4c\lambda \left(\frac{\eta-2}{\eta-1} \right)$, $b = \sqrt{1 + 3\lambda^2 - a^2}$, $c = \frac{\Gamma(\frac{\eta+1}{2})}{\sqrt{\pi(\eta-2)}\Gamma(\frac{\eta}{2})}$, $2 < \eta < \infty$ – число степеней свободы (хвостовой параметр), $-1 < \lambda < 1$ – параметр смещения, $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Полученные оценки параметров асимметричного распределения Стьюдента методом максимального правдоподобия представлены в табл. 3.

Таблица 3

Оценки параметров одномерных распределений (ММП)

	11.01.2012 – 19.09.2015		11.01.2012 – 30.09.2014		01.10.2014 – 19.09.2015	
	η	λ	η	λ	η	λ
GBP	7,4	-0,009	10,6	-0,043	6	0,031
USD	8,5	0,001	8,2	-0,059	20,1	0,091
EUR	7,3	-0,029	8,7	-0,029	7	-0,049
CHF	8,8	-0,019	10,8	-0,029	6,9	-0,029

Перед формированием копулярных моделей было принято решение оценить все возможные парные копулы для каждого периода. Полученные таким образом значения параметров

будут использованы в дальнейшем при построении НАС, НКС и ветвящихся копул. Помимо этого, мы сможем рассмотреть поведение архимедовых копул в каждом периоде и сравнить их. Оценивание параметров, как и все дальнейшие расчеты, проводилось в программной среде R методом максимального правдоподобия с учетом всех ограничений, а для упрощения расчетов максимизировали не функцию правдоподобия, а ее логарифм. Сравнение моделей происходило с помощью остаточной суммы квадратов (RSS) отклонений модельной функции распределения от выборочной. Согласно данному показателю, его наименьшее значение будет соответствовать лучшей модели. Результаты приведены в табл. 4.

Таблица 4

Значения RSS для парных копулярных моделей

Период	Копула	Гамбела – Хаугарда	Joe BB1	Франка
11.01.2012 – 19.09.2015	$C(u_{GBP}, u_{USD})$	0,303	0,286	0,485
	$C(u_{GBP}, u_{EUR})$	0,311	0,324	0,508
	$C(u_{GBP}, u_{CHF})$	0,259	0,246	0,437
	$C(u_{USD}, u_{EUR})$	0,3	0,326	0,512
	$C(u_{USD}, u_{CHF})$	0,292	0,285	0,477
	$C(u_{EUR}, u_{CHF})$	0,312	0,31	0,488
11.01.2012 – 30.09.2014	$C(u_{GBP}, u_{USD})$	0,094	0,047	0,131
	$C(u_{GBP}, u_{EUR})$	0,094	0,07	0,146
	$C(u_{GBP}, u_{CHF})$	0,094	0,059	0,128
	$C(u_{USD}, u_{EUR})$	0,085	0,077	0,138
	$C(u_{USD}, u_{CHF})$	0,097	0,07	0,141
	$C(u_{EUR}, u_{CHF})$	0,093	0,073	0,162
01.10.2014 – 19.09.2015	$C(u_{GBP}, u_{USD})$	0,141	0,162	0,204
	$C(u_{GBP}, u_{EUR})$	0,19	0,206	0,246
	$C(u_{GBP}, u_{CHF})$	0,133	0,141	0,212
	$C(u_{USD}, u_{EUR})$	0,135	0,151	0,214
	$C(u_{USD}, u_{CHF})$	0,086	0,105	0,159
	$C(u_{EUR}, u_{CHF})$	0,129	0,135	0,19

Для общего периода 11.01.2012 – 19.09.2015 трудно определить, какая из копул оказалась лучше. Значения показателя RSS для копул Гамбела – Хаугарда и Joe BB1 близки, при этом первая из них точнее описывает модели $C(u_{GBP}, u_{EUR})$ и $C(u_{USD}, u_{EUR})$, а вторая $C(u_{GBP}, u_{USD})$, $C(u_{GBP}, u_{CHF})$, $C(u_{USD}, u_{CHF})$, $C(u_{EUR}, u_{CHF})$. Для периода 11.01.2012 – 30.09.2014 наилучшие модели были построены при помощи копулы Joe BB1, главной особенностью которой является возможность учета как нижней хвостовой зависимости, так и верхней. В связи с тем, что данная выборка не включает в себя период флуктуаций, значение первого типа зависимости повышается. В период волатильности 01.10.2014 – 19.09.2015 поведение данных характеризуется наличием высокой зависимости верхних хвостов распределения, что соответствует ситуации снижения стоимости российской валюты по отношению к рассматриваемым иностранным валютам. Таким образом, наиболее точные модели для каждой пары валют были построены с помощью копулы Гамбела – Хаугарда, которая позволяет наилучшим образом описать такой тип зависимости. Стоит заметить, что копула Франка в каждом периоде оказывалась хуже в сравнении с двумя другими копулами, что связано с отсутствием возможности учета хвостовой зависимости.

Моделирование и сравнение НАС, НКС и ветвящихся копул

При формировании структур НАС, НКС и ветвящихся копул учитывалась степень связи между валютами. Для этого использовался коэффициент ранговой корреляции Кендалла, представленный в табл. 5 (τ – коэффициент корреляции, τ_n и τ_v – нижняя и верхняя границы

доверительного интервала при $p = 0,95$). Из нее видно, что наиболее тесная связь в каждом периоде присутствовала между евро и швейцарским франком. Вместе с тем, стоит заметить увеличение коэффициентов корреляции Кендалла в последний период, что указывает на сходство поведения рассматриваемых валют во время кризиса.

Таблица 5

Значения коэффициента ранговой корреляции Кендалла

Пара валют	11.01.2012 – 19.09.2015			11.01.2012 – 30.09.2014			01.10.2014 – 19.09.2015		
	τ	τ_H	τ_B	τ	τ_H	τ_B	τ	τ_H	τ_B
GBP, USD	0,638	0,567	0,709	0,552	0,463	0,641	0,801	0,694	0,908
GBP, EUR	0,605	0,532	0,678	0,509	0,417	0,601	0,796	0,687	0,905
GBP, CHF	0,623	0,551	0,695	0,542	0,452	0,632	0,772	0,658	0,886
USD, EUR	0,558	0,482	0,634	0,452	0,357	0,547	0,756	0,639	0,873
USD, CHF	0,562	0,486	0,638	0,455	0,360	0,550	0,748	0,629	0,867
EUR, CHF	0,773	0,715	0,831	0,748	0,677	0,819	0,827	0,726	0,928

В структуре иерархических архимедовых копул на нижних уровнях группируются элементы с наибольшей связью. В таком случае, как оговаривалось ранее, для соблюдения условия вполне монотонности на каждом последующем уровне параметр копулы не должен превышать предыдущий. Помимо этого, в связи с тем, что сочетание копул Клейтона и Гамбела – Хаугарда невозможно, а главной особенностью копулы Joe BB1 является их представление в крайних случаях, было решено использовать только копулы Гамбела-Хаугарда и Франка. Оценивались следующие структуры НАС:

- 1) $C_1(u_{GBP}, u_{USD}, u_{EUR}, u_{CHF}) = C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), C(u_{GBP}, u_{USD}))$;
- 2) $C_2(u_{GBP}, u_{USD}, u_{EUR}, u_{CHF}) = C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}), u_{USD})$;
- 3) $C_3(u_{GBP}, u_{USD}, u_{EUR}, u_{CHF}) = C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{USD}), u_{GBP})$;
- 4) $C_4(u_{GBP}, u_{USD}, u_{EUR}, u_{CHF}) = C(C(C(u_{GBP}, u_{USD}), u_{EUR}), u_{CHF})$ – оценивание такой модели происходило только в рамках волатильного периода.

На основе доверительных интервалов ранговой корреляции Кендалла было решено оценить также копулы, где внешний или внутренний уровень представляет собой три элемента:

- 1) $C_5(u_{GBP}, u_{USD}, u_{EUR}, u_{CHF}) = C(C(u_{GBP}, u_{USD}, u_{EUR}), u_{CHF})$;
- 2) $C_6(u_{GBP}, u_{USD}, u_{EUR}, u_{CHF}) = C(C(u_{GBP}, u_{USD}, u_{CHF}), u_{EUR})$;
- 3) $C_7(u_{GBP}, u_{USD}, u_{EUR}, u_{CHF}) = C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}, u_{USD})$.

Значения показателя RSS представлены в табл. 6. Полученные оценки параметров и значения хвостовых зависимостей для базового периода указаны в прилож. 1.

Таблица 6

Значения RSS для иерархических архимедовых копул

Копула	11.01.2012 – 19.09.2015		11.01.2012 – 30.09.2014		01.10.2014 – 19.09.2015	
	Гамбела – Хаугарда	Франка	Гамбела – Хаугарда	Франка	Гамбела – Хаугарда	Франка
C_1	0,475	0,803	0,2	0,297	0,14	0,27
C_2	0,301	0,307	0,312	0,179	0,079	0,171
C_3	0,352	0,271	0,407	0,222	0,074	0,164
C_4					0,085	0,138
C_5	0,731	0,421	0,94	0,561	0,084	0,134
C_6	0,697	0,39	0,866	0,497	0,087	0,13
C_7	0,287	0,378	0,246	0,159	0,086	0,18

Для первого периода наилучшей моделью оказалась копула Франка с полностью вложенной структурой $C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{USD}), u_{GBP})$. Для второго периода – копула Франка

с тремя элементами на внешнем уровне $C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}, u_{USD})$. Для третьего периода – копула Гамбела – Хаугарда с полностью вложенной структурой

$$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{USD}), u_{GBP}).$$

Таким образом, выбранные модели отличаются друг от друга либо структурой, либо используемой копулой. Помимо этого, выросло качество моделей Франка по сравнению с парными копулами, что может быть вызвано постепенным убыванием связи между элементами на каждом последующем уровне иерархии. Каждый вариант структуры модели в третьем периоде лучше всего описывался копулой Гамбела – Хаугарда. Как оговаривалось ранее, в кризисный период корреляция между валютами увеличивается, и поэтому в нашем случае большое значение приобретает верхняя хвостовая зависимость. Введение двухуровневой модели, где используются три элемента на одном из уровней, оправдало себя только в стабильном периоде. В остальных случаях показатель RSS оказывался больше, чем у копул с парными подуровнями.

Структуры моделей НКС определяются с учетом степени связи между элементами подобно НАС, поэтому они будут идентичны. Важным отличием является отсутствие дополнительных условий, в связи с чем мы не ограничены в выборе моделей. Таким образом, будут оцениваться копулы Гамбела – Хаугарда, Франка и Joe BB1. Полученные значения RSS представлены в табл. 7. Оценки параметров и значения хвостовых зависимостей для базового периода указаны в прилож. 2.

Таблица 7

Значения RSS для иерархических Кендалловых копул

Копула	11.01.2012 – 19.09.2015			11.01.2012 – 30.09.2014			01.10.2014 – 19.09.2015		
	Гамбела – Хаугарда	Joe BB1	Франка	Гамбела – Хаугарда	Joe BB1	Франка	Гамбела – Хаугарда	Joe BB1	Франка
C_1	12,02	11	11,15	9,16	8,30	8,39	1,724	1,632	1,595
C_2	13,33	12,3	12,37	10,51	9,57	9,65	1,662	1,586	1,634
C_3	16,99	15,8	16,05	13,52	12,4	12,92	2,176	2,096	2,057
C_4							2,24	2,139	2,137

Для каждого периода наименьшее значение показателя RSS имели копулы Joe BB1 с частично-вложенной структурой $C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), C(u_{GBP}, u_{USD}))$ для первого и второго периодов и с полностью вложенной структурой $C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}), u_{USD})$ для третьего. Копула Гамбела – Хаугарда в каждом периоде показывала худший результат. В то же время копула Франка по точности была близка к Joe BB1, а в третьем периоде со структурами C_1 , C_3 и C_4 немного превосходила ее.

C-vine и D-vine копулы, как описывалось ранее, отличаются способом связывания частных функций распределения друг с другом. В первом случае мы должны выделить центральный элемент, который будет являться связующим звеном, а во втором мы строим цепь, предварительно выбрав порядок расположения элементов. Для обеих форм R-vine копул определение структуры происходит на основе значений коэффициентов ранговой корреляции Кендалла. В нашем случае центральной связке пары валют соответствует наибольшее значение тесноты связи, а дальнейшее присоединение оставшихся валют происходило в порядке ее убывания. Помимо этого, было решено оценить две C-vine и D-vine копулы, их структуры изображены на рис. 3 (для удобства в индексах валюты обозначаются первой буквой).

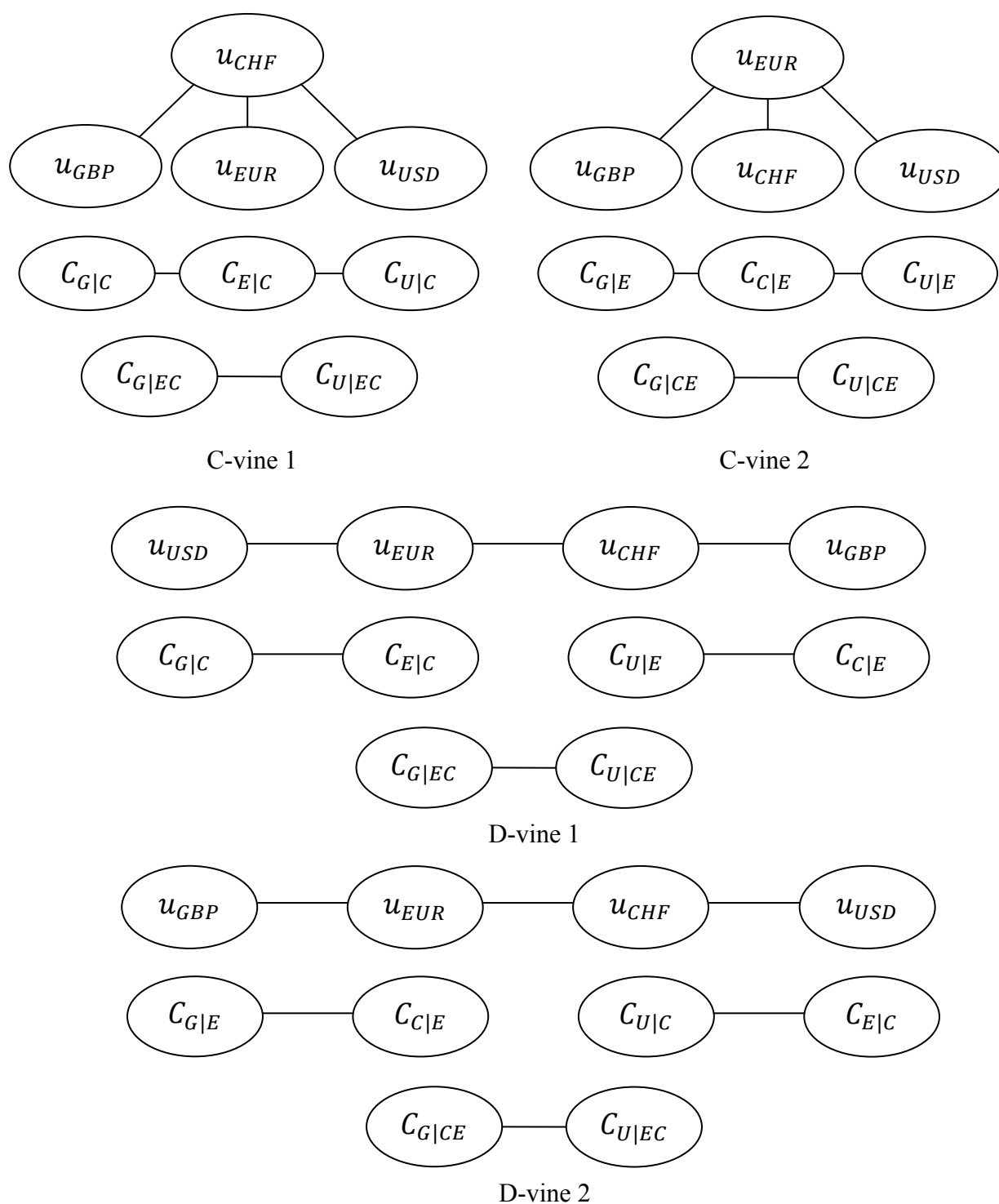


Рис. 3. Строение C-vine 1, C-vine 2, D-vine 1 и D-vine 2 копул

Изображенные на рисунке структуры ветвящихся копул будут использоваться в каждом из трех периодов. Однако так как в период кризиса степень связи между значениями валютных курсов возрастает, было решено для него оценивать вместо C-vine 1 копулу C-vine 3, структура которой представлена на рис. 4. В этом случае значение коэффициента корреляции между центральными элементами уменьшается, а между боковыми – увеличивается.

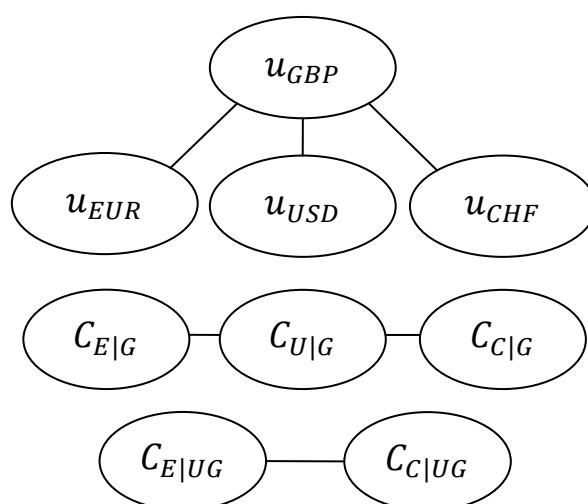


Рис. 4. Строение копулы C-vine 3

Процедура оценивания параметров модели на примере копулы C-vine 1 предполагает выполнение следующего алгоритма действий:

1. Используя ранее найденные параметры парных копул, вычисляем псевдонаблюдения $F_{G|C}$, $F_{E|C}$ и $F_{U|C}$ по формуле $F_{x|y} = \left(\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \right)_{|v=v_0}$.
2. При помощи полученных значений оцениваем методом максимального правдоподобия параметры копул $C_{G|EC}$ и $C_{U|EC}$. Затем рассчитываем псевдонаблюдения $F_{G|EC}$ и $F_{U|EC}$.
3. На заключительном шаге оцениваем параметры копулы $C_{GU|EC}$.

Более подробное описание процедуры оценивания ветвящихся копул содержится в работе [16]. При расчетах использовался программный пакет R CDVine [17]. Полученные значения RSS представлены в табл. 8. Оценки параметров и значения хвостовых зависимостей для базового периода указаны в прилож. 3.

Таблица 8

Значения RSS для C-vine и D-vine копул

Копула	11.01.2012 – 19.09.2015			11.01.2012 – 30.09.2014			01.10.2014 – 19.09.2015		
	Гамбела – Хаугарда	Joe BB1	Франка	Гамбела – Хаугарда	Joe BB1	Франка	Гамбела – Хаугарда	Joe BB1	Франка
C1	72,507	72,7	69,594	46,378	46,4	43,447			
C2	83,994	82,5	74,543	53,961	52,6	47,272	32,01	31,68	29,19
C3							31,451	30,8	27,017
D1	83,139	80,6	69,484	53,587	51	43,775	34,891	34,3	30,931
D2	82,469	79,8	69,907	53,067	50,5	44,177	35,087	34,23	30,665

Согласно таблице, копула Франка оказалась наилучшей в каждом периоде для всех C-vine и D-vine копул. При этом в первом и втором периодах для C-vine 1, D-vine 1 и D-vine 2 копул были получены очень близкие значения показателя RSS, а в третьем периоде наиболее точной оказалась копула C-vine 3. Следует отметить, что для копул Гамбела – Хаугарда

и Joe BB1 в каждом периоде наименьший показатель RSS имели ветвящиеся копулярные модели с корневым элементом, что связано с возможностью учета хвостовой зависимости и увеличением силы связи между элементами в такой схеме, по сравнению с D-vine моделями. В то же время отсутствие такой возможности в копуле Франка объясняет близкие значения RSS для перечисленного ранее ряда моделей.

Для сравнения НАС, НКС и ветвящихся копул в табл. 9 сведены модели с наименьшими значениями показателя RSS в каждом периоде. Из нее видно, что иерархические архимедовы копулы значительно превосходят другие типы копул. При этом стоит отметить, что наиболее часто лучшие модели были получены с помощью копулы Франка, а копула Гамбела – Хаугарда отличилась только в третьем периоде, что непосредственно связано с ростом верхней хвостовой зависимости между значениями курсов валют. Копула Joe BB1 на фоне данных результатов выглядит ограниченно – показывая неплохие результаты в рамках парных копул и моделей НКС, у нас отсутствует возможность использовать ее с НАС из-за условия вполне монотонности.

Таблица 9

Сравнение НАС, НКС и ветвящихся копул

Тип	11.01.2012 – 19.09.2015		11.01.2012 – 30.09.2014		01.10.2014 – 19.09.2015	
	Копула	RSS	Копула	RSS	Копула	RSS
НАС	Франка	0,271	Франка	0,159	Гамбела – Хаугарда	0,074
НКС	Joe BB1	11,01	Joe BB1	8,30	Joe BB1	1,586
Ветвящиеся	Франка	69,484	Франка	43,447	Франка	27,017

Построение прогнозных значений курсов валют

После оценивания рассмотренных видов копулярных моделей для нас наибольшую важность представляет генерирование прогнозных значений курсов валют. Для этого будут использоваться два различных метода. Первый основывается на уже ранее упомянутом распределении Кендалла и описывается следующим алгоритмом действий.

1. Создание двух независимых выборок s и w из равномерного распределения на отрезке $[0,1]$.
2. Присвоение $t = K_C^{-1}(w)$.
3. Требуется выразить $u = \varphi_\alpha^{-1}(s\varphi_\alpha(t))$ и $v = \varphi_\alpha^{-1}((1-s)\varphi_\alpha(t))$.
4. Подставим полученные u и v в обратную частную функцию распределения. Тогда новые выборки $x = F^{-1}(u)$ и $y = G^{-1}(v)$.

Второй метод основывается на конструкции Маршалла – Олкина, согласно которой существует такая неотрицательная случайная величина w , что $\varphi_\alpha(t)$ является обратной функцией-генератором $M(t) = E(e^{-tw})$. В таком случае следует руководствоваться следующим алгоритмом.

1. Генерирование случайных величин w из распределения F_w .
2. Создание двух независимых выборок s и t из равномерного распределения на отрезке $[0,1]$.
3. Присвоение $u = \varphi_\alpha^{-1}(-\frac{\ln s}{w})$ и $v = \varphi_\alpha^{-1}(-\frac{\ln t}{w})$.
4. Получаем новые выборки при помощи обратной частной функции распределения $x = F^{-1}(u)$ и $y = G^{-1}(v)$.

Заметим, что в методе Маршалла – Олкина на первом шаге распределение F_w подбирается индивидуально для каждого вида копулы. Так, для копулы Франка использовалось логарифмическое распределение, а для копулы Гамбела – Хаугарда стабильное. Для копулы Joe BB1

неизвестно, какой тип распределения следует использовать, поэтому было принято решение строить прогноз только для копул Франка и Гамбела – Хаугарда в рамках данного метода.

В связи с тем что оба алгоритма предполагают использование парных копул, прогноз строился для всех парных сочетаний валют при помощи ранее оцененных моделей в каждом периоде. На четвертом шаге применялась обратная функция асимметричного распределения Стюдента, после чего происходил обратный пересчет полученных выборок x и y с использованием моделей $AR(1) - GARCH(1,1)$. Генерирование прогнозных значений курсов валют P проводилось на 20 тактов времени вперед и сравнивались с реальными значениями за период 22.09.2015 – 17.10.2015. В качестве показателя точности прогноза использовались среднеквадратическая ошибка δ и относительная ошибка прогноза $\varepsilon = \frac{\delta}{P}$. В табл. 10 представлены оценки прогнозов с наименьшим значением относительной ошибки для каждой пары валют. Результаты по всем моделям базового периода содержатся в прилож. 4.

Таблица 10

Оценивание прогнозных значений курсов валют

Пара валют		Метод	Модель	Копула	δ	ε
GBP, USD	GBP	Кендалла	11.01.2012 – 19.09.2015	Франка	2,043	0,021
	USD				0,968	0,015
GBP, EUR	GBP	Кендалла	11.01.2012 – 30.09.2014	Joe BB1	4,473	0,055
	EUR				2,35	0,032
GBP, CHF	GBP	Маршалла-Олкина	11.01.2012 – 19.09.2015	Гамбела – Хаугарда	1,285	0,013
	CHF				1,741	0,027
USD, EUR	USD	Кендалла	11.01.2012 – 19.09.2015	Франка	2,945	0,047
	EUR				1,556	0,022
USD, CHF	USD	Маршалла-Олкина	11.01.2012 – 19.09.2015	Гамбела – Хаугарда	1,623	0,026
	CHF				1,978	0,029
EUR, CHF	EUR	Маршалла-Олкина	01.10.2014 – 19.09.2015	Гамбела – Хаугарда	1,024	0,014
	CHF				1,094	0,017

Согласно таблице, большинство наилучших прогнозов были получены при помощи копулярных моделей, построенных по данным за период 11.01.2012 – 19.09.2015. Такой результат вполне логичен и связан с тем, что этот период включает в себя наибольшее количество наблюдений и состоит из стабильного и кризисного периодов. Три парных прогноза были построены с использованием копулы Гамбела – Хаугарда, два – при помощи копулы Франка. Не смотря на присутствие копулы Joe BB1, она отличилась в основном только в рамках моделей периода 01.10.2014 – 19.09.2015, однако по точности оказалась хуже при сравнении с моделями других периодов. Определить, какой из методов генерирования случайных величин оказался лучше невозможно, так как они представлены в таблице поровну. В целом точность полученных прогнозов неудовлетворительна, о чем свидетельствуют высокие значения относительных ошибок большинства прогнозов пар валют (см. прилож. 4). Помимо этого, была выявлена проблема, что при повторном построении прогноза по тем же

самым моделям их точность очень сильно варьировалась. Визуализация наилучшего прогноза по евро и швейцарскому франку представлена на рис. 5.

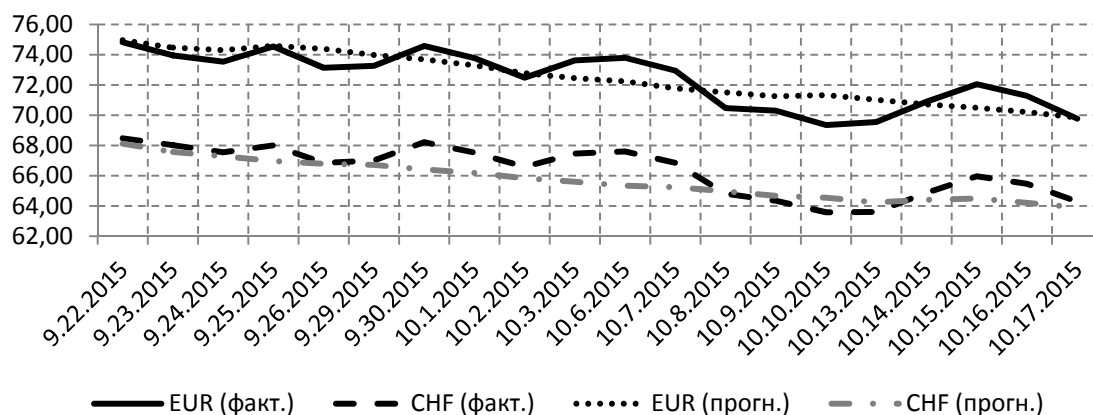


Рис. 5. Фактические и прогнозируемые значения евро и швейцарского франка за период 22.09.2015 – 17.10.2015

Заключение

Исследование показало, что наиболее качественные модели были построены с помощью иерархических архимедовых копул. Наряду с ними использовались НКС и ветвящиеся копулы, однако они оказались несравненно хуже. Ветвящиеся копулы характеризовались такими недостатками, как сложность определения структуры и параметризации модели, при этом данные проблемы приобретают больший вес с увеличением размерности копул. Главным преимуществом НКС копул стала возможность использования двухпараметрической копулы Joe BB1. При построении прогнозов наилучшие были получены с помощью копул Гамбела – Хаугарда, сформированных по данным за период 11.01.2012 – 19.09.2015. При этом выделить один из методов генерирования случайных величин не представляется возможным, так как результаты оказались нестабильны и характеризовались низкой точностью. Данный факт позволяет сделать вывод, что примененные алгоритмы не подходят для построения прогнозов. Решением проблемы могут стать как другие методы генерирования случайных величин, так и уменьшение длины прогноза с последующим учетом новых реальных значений курсов валют и изменением копулярных моделей. Важным направлением дальнейшего исследования является использование рассмотренных видов копулярных моделей в задачах, требующих моделирования хвостовых зависимостей и оценивания вероятности наступления определенных событий для совокупности финансовых активов. К примеру, в качестве таких задач могут выступать моделирование вероятностей дефолтов фондовых индексов нескольких стран [18], оценка возможного объема просроченной кредитной задолженности и определение оптимального размера банковского резерва [19]. Помимо этого, следует продолжить изучение других двухпараметрических копулярных моделей и их использование в рамках НАС, а также уделить внимание дополнительным критериям качества и точности копул.

Список литературы

1. Пеникас Г. И. Модели «копула» в приложении к задачам финансов // Журнал новой экономической ассоциации. 2010. № 7. С. 24–46.
2. Nelsen R. B. An Introduction to Copulas. New York: Springer, 2006. 269 p.

3. Joe H. Multivariate models and dependence concepts New York: Chapman & Hall, 1997. 424 p.
4. Пеникас Г. И. Иерархические копулы в моделировании рисков инвестиционного портфеля // Прикладная эконометрика. 2014. № 3 (35). С. 18–38.
5. Okhrin O., Risting A. Hierarchical Archimedean Copulae: The HAC Package // Discussion Paper 2012-036. Economic Risk. Berlin: Humboldt University, 2012. 23 p.
6. Puzanova N. A hierarchical Archimedean copula for portfolio credit risk modeling // Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Studies. 2011. 40 p.
7. Hofert M. Efficiently sampling nested Archimedean copulas // Computational Statistics and Data Analysis. 2011. Vol. 1 (55). P. 57–70.
8. McNeil A. J. Sampling nested Archimedean copulas // Journal of Statistical Computation and Simulation. 2008. Vol. 78 (6). P. 567–581.
9. Brechmann E. C. Hierarchical Kendall copulas: Properties and inference // Canadian Journal of Statistics. 2014. Vol. 1 (42). P. 78–108.
10. Genest C., Rivest L. Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas // Journal of the American Statistical Association. 1993. Vol. 88. P. 1034–1043.
11. Genest C., Neslehova J., Ziegel J. Inference in multivariate Archimedean copula models // TEST. 2011. Vol. 2 (20). P. 223–292.
12. Barbe P., Genest C. On Kendall's process // Journal of Multivariate Analysis. 1996. Vol. 58. P. 197–229.
13. Bedford T., Cooke R. M. Vines – a new graphical model for dependent random variables // The Annals of Statistics. 2002. Vol. 4 (30). P. 1031–1068.
14. Aas K., Czado C., Frigessi A., Bakken H. Pair-copula constructions of multiple dependence // Collaborative Research Center 386, Discussion Paper 487. 2006. URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bvb:19-epub-1855-3>.
15. Harmantzis F. C., Miao L., Chien Y. Empirical study of value-at-risk and expected shortfall models with heavy tails // The Journal of Risk Finance. 2006. Vol. 2 (7). P. 117–135.
16. Guegan D., Maugis P. An econometric study of vine copulas // International Journal of Economics and Finance. 2010. Vol. 5 (2). P. 2–14.
17. Brechmann E. C., Schepsmeier U. Modeling Dependence with C- and D-Vine Copulas: The R Package CDVine // Journal of Statistical Software. 2013. Vol. 52 (3). P. 1–27.
18. Kangina N., Knyazev A., Lepekhin O., Shemyakin A. Modeling joint distribution of national stock indices // Model Assisted Statistics and Application. 2016. Vol. 11 (1). P. 15–26.
19. Казакова К. А., Князев А. Г., Лепехин О. А. Оптимальный размер банковского резерва: прогноз просроченной кредитной задолженности с использованием копулярных моделей // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Социально-экономические науки. 2015. Т. 15, № 4. С. 59–76.

Приложение 1

Оценивание иерархических архимедовых копул

11.01.2012 – 19.09.2015				
Копула	Копула	β	λ_U	RSS
Гамбела – Хаугарда	$C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), C(u_{GBP}, u_{USD}))$	2,309	0,6499	0,475
	$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}), u_{USD})$	1,825	0,5380	0,301
	$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{USD}), u_{GBP})$	1,876	0,5530	0,352
	$C(C(u_{GBP}, u_{USD}, u_{EUR}), u_{CHF})$	1,806	0,5321	0,731
	$C(C(u_{GBP}, u_{USD}, u_{CHF}), u_{EUR})$	1,803	0,5312	0,697
	$C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}, u_{USD})$	2,029	0,5928	0,287
Франк	$C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), C(u_{GBP}, u_{USD}))$	7,3		0,803
	$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}), u_{USD})$	5,179		0,307
	$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{USD}), u_{GBP})$	5,425		0,271
	$C(C(u_{GBP}, u_{USD}, u_{EUR}), u_{CHF})$	5,116		0,421
	$C(C(u_{GBP}, u_{USD}, u_{CHF}), u_{EUR})$	5,085		0,39
	$C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}, u_{USD})$	6,241		0,378

Приложение 2

Оценивание иерархических Кендалловых копул

11.01.2012 – 19.09.2015						
Копула	Копула	α	β	λ_L	λ_U	RSS
Гамбела – Хаугарда	$C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), C(u_{GBP}, u_{USD}))$		2,316		0,651	12,02
	$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}), u_{USD})$		2,306		0,649	13,33
	$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{USD}), u_{GBP})$		2,464		0,675	16,99
Joe BB1	$C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), C(u_{GBP}, u_{USD}))$	0,397	1,941	0,034	0,571	11,01
	$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}), u_{USD})$	0,482	1,887	0,066	0,556	12,25
	$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{USD}), u_{GBP})$	0,635	2,063	0,105	0,601	15,77
Франк	$C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), C(u_{GBP}, u_{USD}))$		7,428			11,15
	$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{GBP}), u_{USD})$		7,348			12,37
	$C(C(C(u_{CHF}, u_{EUR}), u_{USD}), u_{GBP})$		9,028			16,05

Приложение 3

Оценивание C-vine и D-vine копул

11.01.2012 – 19.09.2015						
Копула	Копула	α	β	λ_L	λ_U	RSS
Гамбела – Хаугарда	C-Vine 1		1,55		0,4361	72,507
	C-Vine 2		1,541		0,4320	83,994
	D-Vine 1		1,525		0,4246	83,139
	D-Vine 2		1,533		0,4283	82,469
Joe BB1	C-Vine 1	0,243	1,415	0,0177	0,3679	72,69
	C-Vine 2	0,227	1,414	0,0133	0,3674	82,51
	D-Vine 1	0,269	1,382	0,0284	0,3487	80,586
	D-Vine 2	0,235	1,401	0,0160	0,3599	79,789
Франк	C-Vine 1		4,564			69,594
	C-Vine 2		4,659			74,543
	D-Vine 1		4,473			69,484
	D-Vine 2		4,433			69,907

Приложение 4

Оценивание прогнозных значений курсов валют

Модели 11.01.2012 – 19.09.2015											
Пара валют		Метод Кендалла						Метод Маршалла-Олкина			
		Гамбела – Хаугарда		Joe BB1		Франка		Гамбела – Хаугарда		Франка	
		δ	ε	δ	ε	δ	ε	δ	ε	δ	ε
GBP, USD	GBP	7,909	0,075	4,601	0,045	2,043	0,021	4,923	0,048	28,19	0,374
	USD	3,638	0,054	2,468	0,038	0,958	0,015	2,340	0,036	20,25	0,428
GBP, EUR	GBP	11,13	0,103	12,12	0,112	4,819	0,047	11,28	0,104	5,562	0,059
	EUR	6,124	0,079	5,184	0,068	10,43	0,127	7,474	0,094	8,174	0,126
GBP, CHF	GBP	6,723	0,065	8,124	0,078	8,483	0,08	1,285	0,013	4,788	0,047
	CHF	10,81	0,144	4,577	0,065	4,773	0,068	1,741	0,027	2,287	0,034
USD, EUR	USD	4,045	0,06	2,537	0,039	2,945	0,047	4,524	0,075	12,29	0,23
	EUR	5,954	0,076	7,733	0,098	1,556	0,022	1,436	0,02	20,39	0,37
USD, CHF	USD	3,212	0,048	3,612	0,054	1,391	0,022	1,623	0,026	3,822	0,063
	CHF	4,014	0,057	4,986	0,07	2,362	0,035	1,978	0,029	6,706	0,111
EUR, CHF	EUR	4,327	0,057	11,67	0,141	2,354	0,032	2,895	0,039	28,78	0,587
	CHF	3,294	0,048	7,131	0,098	1,134	0,017	2,054	0,03	11,95	0,213

I. N. Antonov, A. G. Knyazev, O. A. Lepekhin

Astrakhan State University
20a Tatishchev Str., Astrakhan, 414056, Russian Federation

antonovilya1994@gmail.com, agknyazev@mail.ru
okmb07@yandex.ru

COPULA MODELS OF THE JOINT DISTRIBUTION OF EXCHANGE RATES

The paper aims at investigating the joint distribution of currency rates using HAC, HKC and Vine copulas in several time periods. Models were constructed using Archimedean copulas including Gumbel-Hougaard, Joe BB1 and Frank copulas, and their parameters were estimated by maximum likelihood. The best models were built using hierarchical Archimedean copulas and the worst were obtained with vine copulas. In comparison with the HAC, the main advantage of hierarchical Kendall copulas is the possibility to use a two-parameter copula Joe BB1. The best models were obtained with Frank copula, while Gumbel-Hougaard copula has shown a decent result only in the third period. Additionally, in this paper was made an attempt to get the forecast of exchange rates using Kendall's and Marshall-Olkin's algorithms. The most accurate forecast was obtained with Gumbel-Hougaard copula for euro and franc.

Keywords: Archimedean copulas, currency, forecast, Frank copula, Gumbel-Hougaard copula, HAC, HKC, Joe BB1 copula, Marshall-Olkin's algorithm, sampling via Kendall's Distribution, Vine.

References

1. Penikas G. I. Modeli «kopula» v prilozhenii k zadacham finansov [Financial Applications of Copula-Models]. *The Journal of New Economic Association*, 2010, no. 7, P. 24–46. (In Russ.)
2. Nelsen R. B. An Introduction to Copulas. New York: Springer, 2006, 269 p.
3. Joe H. Multivariate models and dependence concepts. New York: Chapman & Hall, 1997, 424 p.
4. Penikas G. I. Ierarhicheskie kopuly v modelirovanii riskov investicionnogo portfelja [Investment portfolio risk modeling based on hierarchical copulas]. *Applied Econometrics*, 2014, no. 3 (35), P. 18–38. (In Russ.)
5. Okhrin O., Risting A. Hierarchical Archimedean Copulae: The HAC Package. Discussion Paper 2012-036, Economic Risk, Berlin: Humboldt University, 2012, 23 p.
6. Puzanova N. A hierarchical Archimedean copula for portfolio credit risk modeling. Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Studies, 2011, 40 p.
7. Hofert M. Efficiently sampling nested Archimedean copulas. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2011, Vol. 1 (55), P. 57–70.
8. McNeil A. J. Sampling nested Archimedean copulas. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2008, Vol. 78 (6), P. 567–581.
9. Brechmann E. C. Hierarchical Kendall copulas: Properties and inference. *Canadian Journal of Statistics*, 2014, Vol. 1 (42), P. 78–108.
10. Genest C., Rivest L. Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 1993, Vol. 88, P. 1034–1043.
11. Genest C., Neslehova J., Ziegel J. Inference in multivariate Archimedean copula models. *TEST*, 2011, Vol. 2 (20), P. 223–292.
12. Barbe P., Genest C. On Kendall's process. *Journal of Multivariate Analysis*, 1996, Vol. 58, P. 197–229.

13. Bedford T., Cooke R. M. Vines – a new graphical model for dependent random variables. *The Annals of Statistics*, 2002, Vol. 4 (30), P. 1031–1068.
14. Aas K., Czado C., Frigessi A., Bakken H. Pair-copula constructions of multiple dependence. Collaborative Research Center 386, Discussion Paper 487, 2006. URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bvb:19-epub-1855-3>.
15. Harmantzis F. C., Miao L., Chien Y. Empirical study of value-at-risk and expected shortfall models with heavy tails. *The Journal of Risk Finance*, 2006, Vol. 2 (7), P. 117–135.
16. Guegan D., Maugis P. An econometric study of vine copulas. *International Journal of Economics and Finance*, 2010, Vol. 5 (2), P. 2–14.
17. Brechmann E. C., Schepsmeier U. Modeling Dependence with C- and D-Vine Copulas: The R Package CDVine. *Journal of Statistical Software*, 2013, Vol. 52 (3), P. 1-27.
18. Kangina N., Knyazev A., Lepekhin O., Shemyakin A. Modeling joint distribution of national stock indices. *Model Assisted Statistics and Application*, 2016, Vol. 11 (1), P. 15-26.
19. Kazakova K.A., Knyazev A.G., Lepekhin O. A. Optimal'nyj razmer bankovskogo rezerva: prognoz prosrochennoj kreditnoj zadolzhennosti s ispol'zovaniem kopuljarnyh modelej [Optimum volume of bank reserve: forecasting of overdue credit indebtedness using copula models]. *Vestnik NSU. Series: Social and Economics Sciences*, 2015, Vol. 15. No. 4, P. 59-76. (In Russ.)