УДК 330.36.012.4
JEL C62, D83, E10

А. С. Богомолова [1, 2], **Д. В. Колюжнов** [1, 3, 4]

[1] *Новосибирский национальный исследовательский государственный университет ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия*

[2] *Center for Economic Research and Graduate Education-Economics Institute (CERGE-EI) ул. Политицких везню 7, Прага 1, 111 21, Чехия*

[3] *Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия*

[4] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента ул. Кантемировская, 3, Санкт-Петербург, 194100, Россия*

anna.bogomolova@cerge-ei.cz, dmitri.kolyuzhnov@cerge-ei.cz

ДИНАМИКА ВЫБЕГАНИЙ КАК СПОСОБ ОПИСАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Представлен обзор проблем и подходов к анализу динамики выбеганий, возникающей в моделях с адаптивным обучением экономических агентов с постоянным коэффициентом приращения, используемой для моделирования и описания поведения различных показателей (как макро-, так и микроэкономических) при разных экономических явлениях, таких как валютные кризисы, поведение темпов инфляции, эндогенные сговоры в олигополии и циклы экономической активности. В обзоре рассматриваются и противопоставляются два существующих в настоящее время подхода к анализу динамики выбеганий: дискретно-временной, применявшийся, например, Чо, Вильямсом и Сарджентом (2002), и непрерывно-временной, предложенный Каса (2004) и расширенный недавно Колюжновым, Богомоловой и Слободяном (2014), указывая на преимущества последнего. Непрерывно-временной подход основан на применении результатов непрерывно-временной версии теории больших отклонений к диффузионной аппроксимации изначальной дискретно-временной динамики при обучении. Динамика выбеганий характеризуется при помощи аналитических значений наиболее вероятной точки выбегания и среднего времени выбеганий. В статье приведен пример применения непрерывно-временного подхода к задаче Фелпса, в которой правительство контролирует инфляцию, одновременно адаптивно изучая аппроксимацию кривой Филлипса.

Ключевые слова: адаптивное обучение с постоянным коэффициентом приращения, динамика выбеганий, рекурсивный метод наименьших квадратов, теория больших отклонений.

Адаптивное обучение и динамика выбеганий

До недавнего времени гипотеза о рациональных ожиданиях агентов была важным предположением в исследованиях, изучающих модели экономической динамики. Позднее стало появляться все больше и больше исследований, ставящих под сомнение верность этой гипотезы, среди них работы Фукса [1]; Фукса и Ларока [2]; Грандмо [3; 4]; Грандмо и Ларока [5]; Брей [6]; Брей и Савина [7]; Форжо, Горьеру и Прадель [8]; Марсе и Сарджента [9]; Эванса

Богомолова А. С., Колюжнов Д. В. Динамика выбеганий как способ описания экономических явлений // Мир экономики и управления. 2017. Т. 17, № 2. С. 56–71.

ISSN 2542-0429. Мир экономики и управления. 2017. Том 17, № 2

и Хонкапойи [10–12]; Арифович [13]; Кирмана и Вринда [14]; Чо и Сарджента [15]; Маримона [16]; Гианнитсару [17]; Хонкапойи и Митры [18]; Чо и Касы [19] и многие другие. Необходимость изучения моделей с ограниченной рациональностью агентов была веско обоснована Сарджентом [20]. Позднее этот подход был также принят (среди многих других) в работах Эванса и Хонкапойи, и стандартные аргументы в защиту применения ограниченной рациональности можно найти у Эванса и Хонкапойи [21], а также у Сарджента [20].

Подход рациональных ожиданий (RE) предполагает, что агенты обладают большим количеством знаний об экономике (например, о структуре модели и значениях ее параметров), в то время как в эмпирических исследованиях экономисты, предполагающие равновесия при рациональных ожиданиях в своих теоретических моделях, не знают значений параметров и вынуждены оценивать их эконометрически. Как обосновывает Сарджент [20], представляется более естественным предполагать, что в данной экономике агенты сталкиваются с такими же ограничениями, и рассматривать агентов как эконометристов (или статистиков) при прогнозировании будущего состояния экономики, которые оценивают прогнозные модели, используя стандартные статистические процедуры, например метод наименьших квадратов, и формируют убеждения об экономической модели. Убеждения, сформированные таким образом, затем используются для выработки действий агентов и влияют на реализуемые значения экономических переменных, которые берутся агентами в качестве новой точки информационного множества. В следующем периоде агенты обновляют свои убеждения, используя новые данные. Новые убеждения затем влияют на действия агентов и экономические переменные, и этот процесс повторяется период за периодом.

Такая процедура обновления убеждений называется адаптивным обучением экономических агентов, этот подход к моделированию экономических агентов представляет собой особую форму ограниченной рациональности и называется подходом, основанным на адаптивном (эконометрическом) обучении.

Адаптивное обучение в макроэкономике играет несколько ролей. Во-первых, оно используется для проверки верности гипотезы о рациональных ожиданиях, в частности, чтобы выяснить, может ли динамика экономической системы с ограниченно рациональными агентами сойтись к равновесию при рациональных ожиданиях (REE) при каком-то правиле обучения. Во-вторых, оно используется как инструмент выбора в моделях с множественным REE. Выбранное REE и есть то, которое следует ожидать на практике. В-третьих, динамика при обучении сама по себе может представлять интерес в том смысле, что она может быть использована для объяснения поведения макроэкономических данных. И, в-четвертых, алгоритмы обучения могут быть использованы как метод для расчета REE в модели. Преимущество этого метода заключается в том, что можно вычислить только те REE, которое могут быть выучены.

Адаптивное обучение агентов порождает флуктуирующее поведение макроэкономических индикаторов, таких как темп инфляции и уровень безработицы. Эти флуктуации можно характеризовать аналитически, используя две силы, которые существуют в такой динамической системе: динамика среднего, которая двигает систему к точке слабой сходимости, и динамика выбеганий, которая двигает систему от этой точки.

Получение аналитических характеристик динамики выбеганий в экономических моделях с адаптивным обучением позволяет теоретически характеризовать разнообразные экономические явления, такие как валютные кризисы, эпизоды в поведении инфляции, эндогенные сговоры в олигополии и циклы экономической активности (см. [19; 22–28]).

Наиболее ярким примером возможного применения динамики выбеганий для описания экономических явлений, подчеркивающим актуальность рассматриваемых в данной статье подходов к аналитической характеристике подобного варианта флуктуирующего поведения экономических показателей, является проблема проведения монетарной политики гибкого инфляционного таргетирования, которая может приводить к неоднозначному, неожиданному поведению инфляции для монетарных властей в условиях вероятной неверной спецификации структуры уравнений, задающих поведение макроэкономических показателей (такой, как например, неверная спецификация оцениваемой кривой Филлипса).

Лауреат Нобелевской премии 2011 г. Томас Сарджент в известной монографии 1999 г. «The Conquest of American Inflation» [29] использует такие выбегания для объяснения движения к низкой инфляции после 1980 г. в США.

Естественно, что аналогичные проблемы с неожиданными для экономических властей флуктуациями макроэкономических показателей могут возникать и при проведении фискальной политики при неверной спецификации структурных уравнений и регулярном пересмотре их параметров.

Два подхода к анализу динамики выбеганий

Технически такие разнообразные экономические явления, как валютные кризисы, эпизоды в поведении инфляции, эндогенные сговоры в олигополии и циклы экономической активности, моделируются как результат динамики выбеганий в экономических моделях с ограниченно рациональными экономическими агентами, которые используют так называемое эконометрическое обучение для обновления своих убеждений об экономической модели (см. [21]).

Объединенная динамика параметров, характеризующих убеждения агентов, и наблюдаемых экономических переменных задает стохастический рекурсивный алгоритм (SRA). При некоторых условиях регулярности SRA, соответствующий конкретному процессу адаптивного обучения, сходится к равновесию при рациональных ожиданиях (REE) модели (или одному из REE в моделях с множественным равновесием), и, таким образом, предельная динамика при адаптивном обучении совпадает с динамикой при рациональных ожиданиях.

В случае адаптивного обучения с постоянным коэффициентом приращения, позволяющего моделировать поведение агентов, дисконтирующих прошлое, присваивая больший вес более свежим данным, сходимость процесса обучения к REE происходит только по распределению. Это, в свою очередь, порождает устойчивые флуктуации вокруг REE, что приводит к возможности возникновения таких редких (но происходящих с некоторой ненулевой вероятностью) явлений, как убегания, называемые «выбеганиями», параметров убеждений на большие расстояния от REE. Это, в конечном счете, приводит к отклонению от REE и самих наблюдаемых экономических показателей.

Значительные усилия исследователей были затрачены на получение аналитических характеристик динамики выбеганий. Подход, получивший слегка большее развитие в литературе, такой как работы Чо, Вильямса и Сарджента [27] (далее CWS) и Вильямса [22], основывается на получении аналитических характеристик динамики выбеганий для изначального процесса обучения в дискретном времени. Этот подход имеет как теоретические, так и практические проблемы. Теоретическая проблема заключается в том, что для случаев, когда шок на процесс переменной состояния неограниченный (например, гауссовский), не существует достаточных теоретических результатов, позволяющих дать полное описание динамики выбеганий [1]. В частности, теория в данном случае не позволяет точно сказать, каково будет наиболее вероятное направление отклонений от точки сходимости и каково предельное поведение ожидаемого времени первого такого выбегания.

Практическая проблема заключается в том, что получение характеристик динамики выбеганий для дискретно-временного процесса, предложенное Вильямсом [22], подразумевает численное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений с численно заданными функциями. Когда структура процесса переменной состояния имеет много лагов (многомерная переменная состояния), эта система вряд ли решается.

В работе [30] «Динамика выбеганий: аппроксимация в непрерывном времени» (написанной в соавторстве с Сергеем Слободяном) мы развиваем другой способ получения аналитических характеристик динамики выбеганий, который разрешает обозначенные проблемы. В рамках этого подхода предлагается сначала получить непрерывно-временную диффузионную аппроксимацию дискретно-временного SRA, а затем изучить динамику выбеганий для

[1] Детальное объяснение теоретической проблемы приведено далее. Эта ключевая проблема дискретно-временного подхода не поднимается в статье [30].

этой аппроксимации, применив аналитический аппарат, разработанный Фрейдлином и Венцелем [31].

Этот подход относительно новый в литературе. В единственной существовавшей до появления нашей работы [30] статье Касы [28] этот подход рассматривается лишь для очень простого одномерного случая, который нельзя легко обобщить. Применение предлагаемого подхода может быть очень полезным в сложных нелинейных экономических моделях. В случае большой размерности и лаговой структуры, лежащей в основе модели, издержки получения динамики выбеганий для линеаризованной дискретно-временной модели могут оказаться очень большими по сравнению с издержками непрерывно-временного подхода.

Непрерывно-временной подход, развиваемый в [30], разрешает проблемы дискретно-временного подхода. Поскольку диффузия является естественной аппроксимацией для разностного уравнения с гауссовским шумом и поскольку FW разработали теорию больших отклонений для диффузий, проблема недостаточных теоретических результатов отпадает. Практическая проблема также слегка облегчается, поскольку диффузия, полученная путем аппроксимации вокруг REE – стационарной точки SRA – линейная с постоянными коэффициентами.

Постановка модели Фелпса

В статье CWS и нашей статье [30] рассматривается задача Фелпса, в которой правительство контролирует инфляцию, одновременно адаптивно изучая аппроксимацию кривой Филлипса, рассмотренная до этого Сарджентом [29]. CWS используют дискретно-временной подход, а мы тестируем предлагаемый непрерывно-временной подход и сравниваем наши теоретические результаты с результатами имитационного моделирования и теоретическими результатами, полученными CWS.

Рассматриваемая изначально Сарджентом [29], а затем и CWS и Колюжновым и др. [30] экономика состоит из двух игроков: правительства и частного сектора. Целью правительства является минимизация квадратичной функции потерь от инфляции π_n и безработицы U_n

$$E\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\beta^n\left(U_n^2+\pi_n^2\right)$$

при помощи инструмента монетарной политики $\overline{\pi}_n$, представляющего собой среднее значение инфляции, которое может контролировать правительство. При решении оптимизационной задачи правительство использует некоторую обратную зависимость между уровнем действительной инфляции π_n и уровнем безработицы U_n. Эта зависимость (аппроксимация кривой Филлипса), в которую верит правительство, в общем случае не является верной. Вектор $\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\right)$ представляет убеждения правительства о кривой Филлипса; ν_n есть шок кривой Филлипса, который, по убеждению правительства, является белым шумом, нескоррелированным с вектором регрессоров, состоящим из π_n, двух лагов темпа безработицы U_{n-1},U_{n-2}, двух лагов темпа инфляции π_{n-1},π_{n-2} и константы.

Истинная динамика связи между π_n и U_n задается в экономике настоящей кривой Филлипса, которая подвержена случайным сдвигам ($\sigma_1 W_{1n}$) и предполагает обратную зависимость между U_n и неожиданной инфляцией (разницей между реализованной инфляцией π_n и ожиданиями частного сектора $\hat{\pi}_n$). Далее предполагается, что ожидания частного сектора о темпе инфляции являются рациональными $\hat{\pi}_n=\overline{\pi}_n$, поэтому неожиданная инфляция $\pi_n-\hat{\pi}_n$ равна $\sigma_2 W_{2n}$ (шоку или ошибке монетарной политики). W_{1n} и W_{2n} являются нескоррелированными гауссовскими шоками с нулевым средним и единичной дисперсией.

$$U_n=\lambda_1\pi_n+\lambda_2 U_{n-1}+\lambda_3 U_{n-2}+\lambda_4\pi_{n-1}+\lambda_5\pi_{n-2}+\lambda_6+\nu_n, \quad (1)$$

$$U_n=u-\theta\left(\pi_n-\hat{\pi}_n\right)+\sigma_1 W_{1n},\ u>0,\ \theta>0, \quad (2)$$

$$\pi_n=\overline{\pi}_n+\sigma_2 W_{2n}, \quad (3)$$

$$\hat{\pi}_n=\overline{\pi}_n, \quad (4)$$

Для заданного вектора убеждений λ решением линейно-квадратичной задачи правительства

$$E\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\left(U_n^2+\pi_n^2\right)\to\min_{\{\overline{\pi}_n\}_{n=0}^{\infty}}, \tag{5}$$

на ограничениях (1) и (3) является линейное правило монетарной политики

$$\overline{\pi}_n = f_1(\lambda)U_{n-1} + f_2(\lambda)U_{n-2} + f_3(\lambda)\pi_{n-1} + f_4(\lambda)\pi_{n-2} + f_5(\lambda).$$

Для данной модели можно определить три вектора убеждений, приводящих к известным равновесиям в модели правительства, знающего истинную кривую Филлипса (2). Первый вектор убеждений правительства вида $\lambda=\begin{pmatrix}-\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & u(1+\theta^2)\end{pmatrix}$ приводит к решению задачи правительства

$$E\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\left(\left(-\theta(\overline{\pi}_n+\sigma_2 W_{2n})+u(1+\theta^2)\right)^2+\left(\overline{\pi}_n+\sigma_2 W_{2n}\right)^2\right)\to\min_{\{\overline{\pi}_n\}_{n=0}^{\infty}}, \tag{6}$$

которое определяется условиями первого порядка

$$-2\theta(-\theta\overline{\pi}_n + u(1+\theta^2) + 2\overline{\pi}_n = 0,$$

что приводит к правилу политики $\overline{\pi}_n = \theta u$. Такое равновесие соответствует равновесию по Нэшу в модели правительства, знающего истинную кривую Филлипса (2), или дискреционному равновесию Сарджента [29] и Барро, Гордона [32; 33].

Для того чтобы получить равновесие по Нэшу в модели правительства, знающего истинную кривую Филлипса (2), нужно решить систему, состоящую из функции отклика правительства на поведение частного сектора и функции отклика частного сектора на поведение правительства, заданного (4). Функция отклика правительства на поведение частного сектора получается из решения задачи правительства

$$E\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\left(\left(u-\theta(\overline{\pi}_n+\sigma_2 W_{2n}-\hat{\pi}_n)+\sigma_1 W_{1n}\right)^2+\left(\overline{\pi}_n+\sigma_2 W_{2n}\right)^2\right)\to\min_{\{\overline{\pi}_n\}_{n=0}^{\infty}},$$

которое определяется условиями первого порядка

$$-2\theta(u-\theta(\overline{\pi}_n-\hat{\pi}_n))+2\overline{\pi}_n=0.$$

Таким образом, функция отклика правительства на поведение частного сектора имеет вид

$$\overline{\pi}_n=\frac{\theta u+\theta^2\hat{\pi}_n}{1+\theta^2}.$$

При пересечении с функцией отклика частного сектора на поведение правительства, заданной (4), $\hat{\pi}_n=\overline{\pi}_n$, это и дает равновесие по Нэшу: высокое значение средней инфляции $\overline{\pi}_n=\theta u$ и естественный средний уровень безработицы u.

Второй вектор убеждений правительства вида $\lambda=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u^*\end{pmatrix}$ для любого $\gamma=\begin{pmatrix}-\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & u(1+\theta)^2\end{pmatrix}^T$ приводит к решению задачи правительства

$$E\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\left(\left(u^*\right)^2+\left(\overline{\pi}_n+\sigma_2 W_{2n}\right)^2\right)\to\min_{\{\overline{\pi}_n\}_{n=0}^{\infty}},$$

которое определяется условиями первого порядка $2\overline{\pi}_n=0$, что приводит к правилу политики $\overline{\pi}_n=0$ для любого $\gamma=\begin{pmatrix}-\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & u(1+\theta)^2\end{pmatrix}^T$, нулевой средней инфляции $\overline{\pi}_n$ и естественному среднему уровню безработицы u: равновесию по Рамсею, т. е. равновесию по Штакельбергу, где правительство выполняет роль лидера, или оптимальному несостоятельному во времени равновесию Кидланда и Прескотта [34].

Для того чтобы получить равновесие по Штакельбергу, где правительство выполняет роль лидера, в модели правительства, знающего истинную кривую Филлипса (2), нужно решить задачу правительства, знающего функцию отклика частного сектора на поведение правительства $\hat{\pi}_n = \overline{\pi}_n$, заданную (4):

$$E\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\left(\left(u-\theta\sigma_2 W_{2n}+\sigma_1 W_{1n}\right)^2+\left(\overline{\pi}_n+\sigma_2 W_{2n}\right)^2\right)\to\min_{\{\overline{\pi}_n\}_{n=0}^{\infty}},$$

решение которой определяется условиями первого порядка $2\overline{\pi}_n = 0$, что приводит к правилу политики $\overline{\pi}_n = 0$ для любого $\gamma = \begin{pmatrix}-\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & u(1+\theta)^{2}\end{pmatrix}^T$, нулевой средней инфляции $\overline{\pi}_n$ и естественному среднему уровню безработицы *u*.

Наконец, третий вектор убеждений правительства, при котором $\lambda_1+\lambda_4+\lambda_5=0$ (сумма коэффициентов перед текущей и лаговой инфляцией равна нулю) асимптотически приводит к $\overline{\pi}_n = 0$ (т. е. к равновесию по Рамсею): это убеждения «гипотезы индукции» (см. [29]).

Если стохастический рекурсивный алгоритм (SRA), определяющий динамику параметров убеждений в модели с адаптивным обучением экономических агентов сходится, то он сходится к равновесию, при котором предположения правительства об ортогональности ν_n пространству регрессоров совместимы с наблюдениями

$$E\left[\nu_n\cdot\begin{bmatrix}\pi_n & U_{n-1} & U_{n-2} & \pi_{n-1} & \pi_{n-2} & 1\end{bmatrix}'\right]=0. \tag{7}$$

Такая точка сходимости в пространстве параметров убеждений называется CWS *самоподтверждающимся равновесием*, или SCE. Легко показать, что единственным SCE в модели является первый вектор убеждений правительства вида $\lambda = \begin{pmatrix}-\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & u(1+\theta^2)\end{pmatrix}$ (см. [22]). Как показано выше, в пространстве эндогенных переменных модели это равновесие соответствует равновесию по Нэшу с высокой, ненулевой, инфляцией и естественным уровнем безработицы.

Адаптивное обучение и SRA

В отличие от рассмотренных выше ситуаций с постоянным вектором убеждений правительства, при адаптивном обучении предполагается, что правительство каждый период времени пересматривает свои убеждения о коэффициентах кривой Филлипса λ_n и матрице их ковариаций R_n при помощи рекурсивного алгоритма обучения

$$\lambda_{n+1}=\lambda_n+\gamma_n R_n^{-1}h(\lambda_n,\chi_n), \tag{8}$$

$$R_{n+1}=R_n+\gamma_n\left(C_n(\lambda_n,\chi_n)-R_n\right), \tag{9}$$

где

$$\chi_n=\begin{bmatrix}W_{1n} & W_{2n} & \pi_n & U_{n-1} & U_{n-2} & \pi_{n-1} & \pi_{n-2} & 1\end{bmatrix}', \tag{10}$$

$$h\left(\lambda_n,\chi_n\right)=\nu_n\cdot\begin{bmatrix}\pi_n & U_{n-1} & U_{n-2} & \pi_{n-1} & \pi_{n-2} & 1\end{bmatrix}', \tag{11}$$

$$C_n\left(\lambda_n,\chi_n\right)=\begin{bmatrix}\pi_n & U_{n-1} & U_{n-2} & \pi_{n-1} & \pi_{n-2} & 1\end{bmatrix}'\cdot\begin{bmatrix}\pi_n & U_{n-1} & U_{n-2} & \pi_{n-1} & \pi_{n-2} & 1\end{bmatrix}, \tag{12}$$

В случае обычного МНК в рекурсивной форме последовательность коэффициентов приращения γ_n есть $1/n$. Когда $\gamma_n = \mathrm{const}$, это алгоритм обучения *с постоянным коэффициентом приращения*, или алгоритм вечного обучения.

Таким образом, динамика модели при адаптивном обучении правительства описывается следующим образом. В период *n* правительство использует текущий вектор своих убеждений λ_n, чтобы решить оптимизационную задачу (5), предполагая, что убеждения никогда не изменятся. Поведение правительства в области монетарной политики $\overline{\pi}_n$ верно предвидится частным сектором, что приводит к установлению уровня безработицы U_n согласно кривой Филлипса (2). Затем правительство приспосабливает свои убеждения при помощи алгоритма обучения (8)–(12).

Динамику изменения эндогенных переменных и шоков модели можно представить в виде закона движения заданного в (10) *вектора состояний* χ_n :

$$\chi_{n+1} = \mathrm{X}(\lambda_n)\chi_n + \Omega W_{n+1},$$

где $W_{n+1} = \begin{bmatrix} W_{1n+1} & W_{2n+1} \end{bmatrix}'$, для некоторых матриц $\mathrm{X}(\lambda_n)$ и Ω.

Объединив в один вектор-столбец ξ_n^γ параметры убеждений правительства λ_n и записанные один под другим неполные столбцы, состоящие только из неповторяющихся поддиагональных элементов симметричной матрицы ковариаций убеждений R_n (включая диагональ), представленные в виде вектора $vech(R_n)$, динамика модели при обучении с постоянным коэффициентом приращений может быть записана в стандартной форме стохастического рекурсивного алгоритма (SRA):

$$\xi_{n+1}^\gamma = \xi_n^\gamma + \gamma H(\xi_n^\gamma, \chi_n), \tag{13}$$

$$\chi_{n+1} = \mathrm{X}(\lambda_n)\chi_n + \Omega W_{n+1}, \tag{14}$$

где

$$\xi_n^\gamma = \left[\lambda_n', vech'(R_n)\right]' \tag{15}$$

$$H(\xi_n^\gamma, \chi_n) = \left[\left(R_n^{-1} h(\lambda_n, \chi_n)\right)', vech'\left(C_n(\lambda_n, \chi_n) - R_n\right)\right]'. \tag{16}$$

CWS показывают, что точка самоподтверждающегося равновесия (SCE), определяемая (7), – единственный набор убеждений, соответствующий состоятельному во времени равновесию по Нэшу, является точкой слабой сходимости SRA (13)–(16).

Данная модель, записанная в виде SRA (13)–(16) способна генерировать динамику выбеганий следующим образом. В равновесии, которым является точка самоподтверждающегося равновесия (SCE), правительство убеждено в сильной обратной зависимости между инфляцией и безработицей (1) и пытается ее использовать, решая оптимизационную задачу (6), что приводит к установлению им высокой средней инфляции $\overline{\pi}_n = \theta u$, что вместе с рациональными ожиданиями частного сектора приводит к среднему естественному уровню безработицы *u*. Иначе говоря, экономика оказывается в высокоинфляционном равновесии по Нэшу. Однако время от времени последовательность стохастических шоков заставляет правительство выучить то, что на самом деле обратная зависимость между безработицей и инфляцией очень слаба. Эти убеждения о кривой Филлипса заставляют правительство, устанавливать средний уровень инфляции $\overline{\pi}_n$ на низком уровне и таким образом приближаться к равновесию по Рамсею: нулевому среднему уровню инфляции и среднему естественному уровню безработицы *u*. Такие большие отклонения уровня инфляции из окрестности равновесия по Нэшу по направлению к низкоинфляционному несостоятельному во времени равновесию по Рамсею и задают динамику выбеганий.

Дискретно-временной подход

Первым шагом как дискретно-временного подхода, развиваемого CWS, так и непрерывно-временного подхода, развиваемого в [30], является построение кусочно-линейной непрерывно-временной интерполяции $\xi^\gamma(t)$ последовательности убеждений ξ_n^γ и системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), аппроксимирующих поведение SRA (13)–(16), задаваемой следующим образом:

$$\dot{\lambda} = R^{-1}\overline{h}(\lambda) = R^{-1}E\left[h(\lambda, \chi_n)\right], \tag{17}$$

$$\dot{R} = \overline{C}(\lambda) - R = E\left[C_n(\lambda, \chi_n)\right] - R. \tag{18}$$

Единственным равновесием записанного выше ОДУ является вектор убеждений правительства $\overline{\lambda} = \begin{pmatrix} -\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & u(1+\theta^2) \end{pmatrix}$, задающий SCE и равновесие по Нэшу, и соответствующая ему матрица вторых моментов $\overline{R}$. Это равновесие является стабильным. CWS показывают, что при определенных предположениях непрерывно-временной процесс $\xi^{\gamma}(t) = \left[\lambda^{\gamma}(t)', vech'(R^{\gamma}(t))\right]'$, задаваемый как $\xi^{\gamma}(t) = \xi_n^{\gamma}$ для $t \in [n\gamma, (n+1)\gamma)$, слабо сходится (по распределению) к так называемой «траектории динамики среднего» SRA (13)–(16) $\xi(t,a) = [\lambda', vech'(R)]'$, которая представляет собой решение ОДУ (17), (18), где $a = \xi(0)$ есть начальное условие ОДУ (17), (18) и стартовая точка для процесса $\xi^{\gamma}(t)$.

То, что сходимость ξ_n^{γ} к траектории динамики среднего $\xi(t)$ только слабая (по распределению), является следствием постоянного коэффициента приращения в алгоритме адаптивного обучения. Это создает постоянные флуктуации вокруг траектории $\xi(t,a)$ и ее стационарной точки $\overline{\xi}$, которые иногда выталкивают стохастический процесс ξ_n^{γ} за какую-либо заданную область вокруг траектории сходимости $\xi(t,a)$. Вероятность таких редких явлений можно оценить при помощи теории больших отклонений, которая говорит о том, что асимптотически эти вероятности ведут себя как $\exp\left\{-C\gamma^{-2}\right\}$, по мере того как $\gamma \to 0$ (см. Фрейдлин и Венцель [31. С. 6]).

Основой для анализа динамики выбеганий при дискретно-временном подходе являются результаты Дюпуи и Кушнера [35] для теории больших отклонений дискретных во времени процессов и результаты Вильямса [22], применившего их общие результаты для линейно-квадратического случая, когда процесс переменной состояния представляет собой авторегрессию с гауссовским шумом.

Обобщенно, основной теоретический результат, на котором основывается дискретно-временной подход, разработанный CWS, можно записать в виде следующей теоремы (обобщающей теоремы 5.3. и 5.4. CWS), выполняющейся для характеристики конечной точки и первого времени выбегания определяемой выше кусочно-линейной интерполяции процесса последовательности параметров убеждений правительства $\lambda^{\gamma}(t)$ за окрестность D точки SCE.

Теорема 1. При выполнении определенных условий регулярности (детали см. у CWS).

1. Пусть шоки W являются н.о.р.с.в. и неограниченными, но существует σ-алгебра $F_n \supset \sigma(\lambda_i, i \le n)$ и константы $\kappa > 1, B < \infty$, такие что для всех n и $s \ge 0$ выполняется

$$P\left(\left|R_n^{-1} h(\lambda_n, \chi_n)\right| \ge s \middle\| F_n\right) \le B \exp\left(-s^k\right)$$

почти наверное, тогда

$$\limsup_{\gamma \to 0} \gamma \ln P\left(\lambda^{\gamma}(t) \notin D\right.$$

для некоторого $\left.0 < t \le T \middle| \lambda^{\gamma}(0) = \overline{\lambda}\right) \le -\overline{S}$.

2. Если шоки W являются н.о.р.с.в. и ограниченными, а $\overline{S}$ является непрерывной функцией от радиуса множества D, тогда

$$\limsup_{\gamma \to 0} \gamma \ln P\left(\lambda^{\gamma}(t) \notin D\right.$$

для некоторого $\left.0 < t \le T \middle| \lambda^{\gamma}(0) = \overline{\lambda}\right) = -\overline{S}$.

3. При выполнении предположений пункта 2 теоремы, для любого $\delta > 0$ время первого выбегания из D, τ^{γ} удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{\gamma \to 0} P\left(\exp\left(\left(\overline{S} + \delta\right)/\gamma\right) > \tau^{\gamma} > \exp\left(\left(\overline{S} + \delta\right)/\gamma\right)\right) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\gamma \to 0} \gamma \ln E(\tau^{\gamma}) = \overline{S}.$$

4. При выполнении предположений пункта 2 теоремы конечная точка выбегания $\overline{x}$ и конечное время выбегания τ^{γ} для любого $\delta > 0$ удовлетворяют соотношению

$$\lim_{\gamma\to 0} P\left(\left|\lambda^{\gamma}(\tau^{\gamma}) - \bar{x}\right| < \delta\right) = 1$$

для некоторой функции $\bar{S}$, в общем виде определяемой CWS в своих уравнениях (5.35)–(5.38), где, если процесс для переменной состояния χ_n представляет собой стационарную авторегрессию с гауссовским шумом, $\bar{S}$ есть решение задачи вариационного исчисления

$$\bar{S} = \inf_{\dot{v}} \frac{1}{2}\int_{o}^{t} \dot{v}(s) Q(\lambda_s, R_s)^{-1} \dot{v}(s) ds, \tag{19}$$

$$\text{s.t.} \qquad \dot{\lambda} = R^{-1}\bar{h}(\lambda) + \dot{v}_t, \tag{20}$$

$$\dot{R} = \bar{C}(\lambda) - R \tag{21}$$

$$\lambda_0 = \bar{\lambda},\ R_0 = \bar{R},\ \lambda_t \in D$$

для некоторого

$$0 < t < T. \tag{22}$$

Таким образом, для получения характеристик динамики выбеганий при непрерывно-временном подходе нужно решить задачу вариационного исчисления (19)–(22). Ее решение сводится к решению системы дифференциальных уравнений (см. CWS):

$$\dot{\lambda} = R^{-1}\bar{h}(\lambda) + Q(\lambda, R)\alpha, \tag{23}$$

$$\dot{R} = \bar{C}(\lambda) - R, \tag{24}$$

$$\dot{\alpha} = \alpha \cdot R^{-1}\frac{\partial \bar{h}(\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{1}{2}\alpha' \frac{\partial Q(\lambda, R)}{\partial \lambda}\alpha + \mu \cdot \bar{C}_{\lambda}(\lambda), \tag{25}$$

$$\dot{\mu} = \mathrm{H}_R - \mu \cdot I, \tag{26}$$

где H_R есть производная гамильтониана $\mathrm{H} = \alpha \cdot R^{-1}\bar{h}(\lambda) + \frac{1}{2}\alpha' Q(\lambda, R)\alpha - \mu \cdot \bar{C}(\lambda)$ по R; α, μ – множители Лагранжа.

К сожалению, теорема 1, используемая последователями дискретно-временного подхода, не содержит достаточных теоретических результатов, позволяющих получить полное описание динамики выбеганий в случае, если процесс переменной состояния подвержен неограниченным (например, гауссовским) шокам. В частности, нет точных результатов по наиболее вероятной точке выбеганий из окрестности точки сходимости (как утверждалось выше, этой точкой обычно является REE) и ожидаемого времени до первого выбегания. Теорема 1 дает полные результаты только по ограниченным шокам.

Также получение характеристик динамики выбеганий для дискретно-временного процесса подразумевает численное задание функционала в задаче вариационного исчисления (19)–(22) при помощи матрицы $Q(\lambda, R)$, что приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений с численно заданными функциями в правой части (23)–(26). Для усложненных задач (много лагов, большая размерность), этот подход может стать численно неподъемным. Наконец, аналитическое решение для динамики выбеганий дискретно-временного процесса может быть получено только для ограниченной формы процесса обучения, такого как рекурсивный метод наименьших квадратов или метод стохастического градиента с постоянным коэффициентом приращения. Вильямс [22] показывает, что в случае гауссовских шоков и квадратичной функции $\bar{h}(\lambda)$ решение системы (23)–(26) сводится к решению уравнений Ляпунова (см. CWS, Прил. С). Это решение, несмотря на отсутствие достаточных теоретических результатов для неограниченных шоков, и используется CWS в дискретно-временном подходе.

Непрерывно-временной подход

Альтернативно, теоретические результаты Фрейдлина и Венцеля [31] по характеристикам динамики выбеганий в непрерывном времени могут быть применены к непрерывно-временной аппроксимации изначального дискретно-временного SRA. В этом и есть суть непрерывно-временного подхода. Эванс и Хонкапойя [21, Утв. 7.8] показывают, что по мере того как $\gamma \to 0$, процесс $U_t^\gamma = \dfrac{\xi^\gamma(t) - \xi(t,a)}{\sqrt{\gamma}}$ сходится (слабо) к следующей диффузии:

$$dU^\gamma(t) = D_\xi p\left(\xi(t,a)\right)U^\gamma(t)dt + \Sigma^{1/2}\left(\xi(t,a)\right)dW_t,$$

где W_t есть многомерный Броуновский процесс с размерностью, равной размерности ξ, $p\left(\xi\right)$ есть вектор динамики среднего, а Σ – матрица, элементы которой являются ковариациями разных компонент вектора динамики среднего, и тот и другой определяются по отношению к единственному инвариантному распределению вероятностей $\Gamma_\xi(dx)$ вектора состояний χ_n из (14):

$$p(\xi) = \int H(\xi, x)\Gamma_\xi(dx),$$

$$\Sigma_{ij} = \sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{cov}\left[H_i\left(\xi, \chi_n(\xi)\right), H_j\left(\xi, \chi_0(\xi)\right)\right].$$

Этот результат позволяет получить непрерывно-временную аппроксимацию для любого данного начального условия:

$$d\xi^\gamma(t) = D_\xi p\left(\xi(t,a)\right)\left[\xi^\gamma(t) - \xi(t,a)\right]dt + \sqrt{\gamma}\Sigma^{1/2}\left(\xi(t,a)\right)dW_t.$$

Вильямс показывает [22. Теорема 3.2], что полученный выше результат может быть использован для получения локальной непрерывно-временной аппроксимации SRA около предельной точки $\overline{\xi}$ (стабильной точки ассоциированного ОДУ (17), (18), SCE):

$$d\omega_t = D_\xi p\left(\overline{\xi}\right)\omega_t dt + \sqrt{\gamma}\Sigma^{1/2}(\overline{\xi})dW_t, \tag{27}$$

где $\omega_t = \xi(t) - \overline{\xi}$ есть отклонения от SCE. Левый верхний 6×6 угол матрицы $\Sigma(\overline{\xi})$ равен матрице четвертых моментов Q у CWS, посчитанной в точке $\overline{\xi}$. Матрицы $D_\xi p\left(\overline{\xi}\right)$ и $\Sigma(\overline{\xi})$ необходимо посчитать только в SCE. Это можно сделать аналитически.

Предположим, что у нас есть стохастический процесс, например, некоторая диффузия (27). Основная идея теории больших отклонений для траекторий стохастических процессов заключается в том, что вероятность отклонения стохастического процесса от данной конкретной траектории может быть определена значением определенного функционала (называемого *функционалом действия*) на этой траектории. Функционал действия $I_{0T}(\omega)$ представляет затраты, связанные с движением вдоль какой-то траектории ω в течение периода времени [0, *T*]. Функция затрат $I(T, x, y) = \min\limits_{\omega_0 = x, \omega_T = y} I_{oT}(\omega)$ есть минимальные затраты, требуемые для перехода из *x* в *y* за время *T*. *Квазипотенциал* $I(x, y) = \inf\limits_{T>0} I(T, x, y)$ – это минимальные затраты, необходимые для перехода из *x* в *y* в течение любого (потенциально бесконечного) времени. Идея здесь заключается в том, что система движется в направлении, вдоль которого она несет наименьшие издержки.

Предположим, что такой функционал существует. У нас есть некоторая окрестность *D* стационарной точки дрейфа диффузии, *O*. При определенных предположениях можно получить вероятность того, что стохастический процесс принадлежит *D* из минимального значения квазипотенциала $I(O, y)$ на границе *D*, $\{y : y \in \partial D\}$. Наиболее вероятная точка, через которую стохастический процесс покидает (выбегает) *D*, есть точка, в которой $I(O, y)$ достигает минимума. Минимум $I(O, y)$ также позволяет получить асимптотическое поведение среднего времени выбеганий, т. е. ожидаемого времени, необходимого для того, чтобы стохастический процесс пересек границу *D* первый раз.

Точные результаты по среднему времени выбеганий и доминантной точке выбегания даны в книге Дембо и Зейтоуни [36. Теорема 5.7.11]. В частности, предельное поведение среднего времени выбеганий, $E(\tau^\gamma)$, задается

$$\lim_{\gamma \to 0} \gamma \ln E(\tau^\gamma) = \overline{I}, \tag{28}$$

где $\overline{I}$ есть минимальное значение квазипотенциала на ∂D. Наиболее вероятная точка выбегания есть экстремаль квазипотенциала на ∂D. Формула (28) подразумевает, что график $\ln E\left(\tau^{\gamma}\right)$ в зависимости от значений $1/\gamma$ является прямой линией с наклоном, равным темпу сходимости $\overline{I}$.

Как понятно из вышеизложенного, для дискретно временного подхода функционал действия и квазипотенциал скрыты в целевой функции задачи вариационного исчисления (19)–(22). Получаемое CWS значение $\overline{S}$ является минимальным значением квазипотенциала на ∂D.

Для диффузии, используемой нами в непрерывно-временном подходе,

$$d\omega_t = A\omega_t dt + \sqrt{\gamma} B dW_t ,$$

Дембо и Зейтоуни [36. С. 214] дают следующее выражение для функционала действия:

$$I_{0T}(\omega) = \inf \frac{1}{2}\int_0^T \left|\dot{g}_t\right|^2 dt , \tag{29}$$

$$\text{s.t. } \dot{\omega}_t = A\omega_t + B\dot{g}_t ,$$

$$\omega_0 = 0 ,$$

где предполагается, что стационарная точка дрейфа O является стартовой. Минимизация производится по всем возможным траекториям $\dot{g}_t = u_t$, которые приводят систему от стартовой точки к ω_T ровно за T единиц времени. В аппроксимирующей диффузии (27) матрица A равняется $D_{\xi} p\left(\overline{\xi}\right)\Big)$, а $B = \Sigma^{1/2}(\overline{\xi})$.

Единственная сложность в этой формулировке проистекает из того факта, что матрица $B = \Sigma^{1/2}(\overline{\xi})$ может быть вырождена. В результате могут существовать точки в пространстве состояний, которых нельзя достигнуть ни за какое время ни по какой траектории контроля $\left\{u_t\right\}_{t=0}^{\infty}$: система ($A$, B) не обязательно достижима. Способом подступа к задаче контроля для недостижимой системы является трансформация пространства состояний таким образом, что первые k новых координат (y_1) формировали базис *достижимого подпространства*, в то время как оставшиеся $n - k$ (y_2) координат все равны нулю. В этих координатах эволюция системы на достижимом подпространстве управляется

$$\dot{y}_1 = \overline{A}_1 y_1 + \overline{B}_1 u ,$$

где $y_1 = \left(T_1\right)' \omega$, T_1 есть базис достижимого подпространства, а система $(\overline{A}_1, \overline{B}_1)$ по построению достижима (построение см. у Далеха и др. [37. Гл. 22]). Функционал действия (29) затем переписывается в виде

$$I_{0T}(y_1) = \inf \frac{1}{2}\int_0^T \left|\dot{g}_t\right|^2 dt ,$$

$$\text{s.t. } \dot{y}_1 = \overline{A}_1 y_1 + \overline{B}_1 u ,$$

$$y_1(0) = 0 .$$

Для того чтобы найти $\overline{I}$, необходимо минимизировать $I_{0T}(y_1)$ по времени выбегания T и всем точкам $y_{1,D}$, таким что $T_1 y_{1,D} \in \partial D$. Другими словами, задача поиска минимального значения функционала действия по всем траекториям, начинающимся в стартовой точке и заканчивающимся на ∂D в произвольное время, разделяется на две отдельные задачи: первая – найти траекторию контроля с минимальной нормой, $\dot{g}_t$, которая приводит линейную систему контроля из стартовой точки к $y_{1,D}$ за произвольное время, а затем минимизировать результирующую целевую функцию по всем возможным конечным точкам $y_{1,D}$.

Первая задача – это стандартная задача контроля, имеющая следующее решение:

$$I(y_{1,D}) = \frac{1}{2} y_{1,D}' \overline{G}^{-1} \cdot y_{1,D} ,$$

где $\overline{G}$ есть Грамиан достижимой подсистемы. Задача поиска минимального значения функционала действия затем становится тривиальной: минимизировать квадратичную функцию от $y_{1,D}$ на $\{y_{1,D} : T_1 y_{1,D} \in \partial D\}$. Решая эту задачу, мы находим наиболее вероятную точку выбегания, $T_1 y_{1,D}$, и темп сходимости, $\overline{I}$, который характеризует предельное поведение среднего времени выбеганий предельным равенством (28).

Заключение

В статье представлен обзор проблем и подходов к анализу динамики выбеганий, используемой для моделирования и описания поведения различных показателей (как макроэкономических, так и микроэкономических) при разных экономических явлениях, таких как валютные кризисы, поведение темпов инфляции, эндогенные сговоры в олигополии и циклы экономической активности. Также анализ динамики выбеганий использовался при анализе больших мутаций в эволюционных играх (см. Кандори, Майлат, Роб [38], Бинмор и Самуэльсон [39]). Актуальность темы обусловлена проблемой выработки правил экономической (преимущественно, монетарной, как показано на практике США, но, возможно, и фискальной) политики и оценки ее последствий в условиях вероятной неверной спецификации структуры уравнений, задающих поведение макроэкономических показателей (такой, как например, неверная спецификация оцениваемой кривой Филлипса).

На вопросы оценки последствий и оценки вероятности таких явлений, как динамика выбеганий, возникающих при определенной экономической политике, и отвечают разработанные методы анализа динамики выбеганий в экономических моделях с адаптивным обучением с постоянным коэффициентом приращения. Мы сравниваем и противопоставляем два существующих подхода к анализу: дискретно-временной, применявшийся, например, CWS, и непрерывно-временной, предложенный Каса [28] и расширенный недавно в [30], указывая на преимущества последнего. В статье приведен пример применения непрерывно-временного подхода к анализированной на динамику выбеганий в разное время Сарджентом [29], CWS, и Колюжновым и др. [30] задаче Фелпса, в которой правительство контролирует инфляцию, одновременно адаптивно изучая аппроксимацию кривой Филлипса.

Нетехнический анализ говорит о том, что суть подходов к получению аналитических характеристик динамики выбеганий заключается в том, что выбегание будет происходить в том направлении, на котором экономическая система несет некие условно наименьшие затраты (эта функция издержек называется функционалом действия). Эта функция, по своей сути, выглядит как функция издержек отклонений от оптимальной траектории, эквивалентная в эконометрическом смысле сумме квадратов отклонений. Она же задает и среднее значение времени выбегания, и времени нахождения в окрестности равновесия и вероятности того, что система останется в окрестности данного равновесия или покинет ее.

Список литературы

1. *Fuchs G.* Is error learning behavior stabilizing? // Journal of Economic Theory. 1979. Vol. 20. P. 300–317.

2. *Fuchs G.*, *Laroque G.* Dynamics of temporary equilibria and expectations // Econometrica. 1976. Vol. 44. P. 1157–1178.

3. *Grandmont J.-M.* On endogenous competitive business cycles // Econometrica. 1985. Vol. 53. P. 995–1045.

4. *Grandmont J.-M.* Expectations formation and stability of large socioeconomic systems // Econometrica. 1998. Vol. 66. P. 741–781.

5. *Grandmont J.-M.*, *Laroque G.* Stability of cycles and expectations // Journal of Economic Theory. 1986. Vol. 40. P. 138–151.

6. *Bray M. M.* Learning, estimation, and the stability of rational expectations equilibria // Journal of Economic Theory. 1982. Vol. 26. P. 318–339.

7. *Bray M. M.*, *Savin N. E.* Rational expectations equilibria, learning, and model specification // Econometrica. 1986. Vol. 54 (5). P. 1129–1160.

8. *Fourgeaud C.*, *Gourieroux C.*, *Pradel J.* Learning procedures and convergence to rationality // Econometrica. 1986. Vol. 54 (4). P. 845–868.

9. *Marcet A.*, *Sargent T. J.* Convergence of least squares learning mechanisms in self-referential linear stochastic models // Journal of Economic Theory. 1989. Vol. 48 (2). P. 337–368.

10. *Evans G. W.*, *Honkapohja S.* Learning, convergence, and stability with multiple rational expectations equilibria // European Economic Review. 1994. Vol. 38. P. 1071–1098.

11. *Evans G. W.*, *Honkapohja S.* On the local stability of sunspot equilibria under adaptive learning rules // Journal of Economic Theory. 1994. Vol. 64. P. 142–161.

12. *Evans G. W.*, *Honkapohja S.* Local convergence of recursive learning to steady states and cycles in stochastic nonlinear models // Econometrica. 1995. Vol. 63. P. 195–206.

13. *Arifovic J.* Genetic algorithm learning and the cobweb model // Journal of Economic Dynamics and Control. 1994. Vol. 18. P 3–28.

14. *Kirman A. P.*, *Vriend N. J.* Evolving market structure: An ACE model of price dispersion and loyalty // Journal of Economic Dynamics and Control. 2001. Vol. 25. P. 459–502.

15. *Cho I.-K.*, *Sargent T. J.* Neural networks for encoding and adapting in dynamic economies // Handbook of Computational Economics / Eds. H. M. Amman, D. A. Kendrick, J. Rust. 1996. P. 441–470.

16. *Marimon R.* Learning from learning in economics // Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications / Eds. David M. Kreps, Kenneth F. Wallis. Cambridge University Press, 1997. Vol. 1, chapter 9. P. 278–315.

17. *Giannitsarou Ch.* Heterogeneous learning // Review of Economic Dynamics. 2003. Vol. 6. P. 885–906.

18. *Honkapohja S.*, *Mitra K.* Learning stability in economies with heterogeneous agents // Review of Economic Dynamics. 2006. Vol. 9 (2). P. 284–309.

19. *Cho I.-K.*, *Kasa K.* Learning dynamics and endogenous currency crises // Macroeconomic Dynamics. 2008. Vol. 12. P. 257–285.

20. *Sargent T. J.* Bounded Rationality in Macroeconomics. Oxford; N. Y.: Oxford University Press, Clarendon Press, 1993.

21. *Evans G. W.*, *Honkapohja S.* Learning and Expectations in Macroeconomics. Princeton, NJ.: Princeton University Press, 2001.

22. *Williams N.* Escape Dynamics in Learning Models. PhD thesis, University of Chicago, 2001.

23. *Williams N.* Stability and long run equilibrium in stochastic fictitious play. Manuscript, Princeton University, 2002.

24. *Williams N.* Adaptive learning and business cycles. Manuscript, Princeton University, 2003.

25. *Williams N.* Small noise asymptotics for a stochastic growth model // Journal of Economic Theory. 2004. Vol. 119 (2). P. 271–298.

26. *Bullard J. B.*, *Cho I.-K.* Escapist policy rules // Journal of Economic Dynamics and Control. 2005. Vol. 29 (11). P. 1841–1865.

27. *Cho I.-K.*, *Williams N.*, *Sargent T. J.* Escaping Nash inflation // Review of Economic Studies. 2002. Vol. 69 (1). P. 1–40.

28. *Kasa K.* Learning, large deviations, and recurrent currency crises // International Economic Review. 2004. Vol. 45. P. 141–173.

29. *Sargent T. J.* The Conquest of American Inflation. Princeton, NJ.: Princeton University Press, 1999.

30. *Kolyuzhnov D.*, *Bogomolova A.*, *Slobodyan S.* Escape Dynamics: A Continuous-Time Approximation // Journal of Economic Dynamics and Control. 2014. Vol. 38 (1). P. 161–183. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165188913002029

31. *Freidlin M. I.*, *Wentzell A. D.* Random Perturbations of Dynamical Systems, second edition. New York: Springer-Verlag, 1998.

32. *Barro R. J.*, *Gordon D. B.* A positive theory of monetary policy in a natural-rate model // Journal of Political Economy. 1983. Vol. 91. P. 589–610.

33. *Barro R. J.*, *Gordon D. B.* Rules, discretion, and reputation in a model of monetary policy // Journal of Monetary Economics. 1983. Vol. 12. P. 101–121.

34. *Kydland F. E.*, *Prescott E. C.* Rules rather than discretion: The inconsistency of optimal plans // Journal of Political Economy. 1977. Vol. 85. P. 473–491.

35. *Dupuis P.*, *Kushner H. J.* Stochastic approximation and large deviations: Upper bounds and w.p.1 convergence // SIAM Journal on Control and Optimization. 1989. Vol. 27. P. 1108–1135.

36. *Dembo A.*, *Zeitouni O.* Large Deviations Techniques and Applications. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1998.

37. *Dahleh M.*, *Dahleh M. A.*, *Verghese G.* Lectures on dynamic systems and control. MIT lecture notes, 2004.

38. *Kandori M.*, *Mailath G. J.*, *Rob R.* Learning, mutation, and long run equilibria in games // Econometrica. 1993. Vol. 61. P. 29–56.

39. *Binmore K.*, *Samuelson L.* Muddling through: Noisy equilibrium selection // Journal of Economic Theory. 1997. Vol. 74. P. 235–265.

Материал поступил в редколлегию 14.02.2017

A. S. Bogomolova [1, 2], D. V. Kolyuzhnov [1, 3, 4]

[1] *Novosibirsk State University,*
1 Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

[2] *Center for Economic Research and Graduate Education-*
Economics Institute (CERGE-EI)
7 Politickych veznu st., Prague 1, 11121, Czech Republic

[3] *Institute of Economics and Industrial Engineering SB RAS*
17 Acad. Lavrentiev Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

[4] *National Research University Higher School of Economics (HSE)*
Saint Petersburg School of Economics and Management
Kantemirovskaya st. 3, St. Petersburg, 194100, Russian Federation

anna.bogomolova@cerge-ei.cz, dmitri.kolyuzhnov@cerge-ei.cz

ESCAPE DYNAMICS AS A WAY TO DESCRIBE ECONOMIC PHENOMENA

This paper presents the review of issues and approaches to the analysis of escape dynamics in economic models with constant gain adaptive learning which is used to model and describe the behavior of various (macroeconomic as well as microeconomic) variables in diverse economic phenomena such as currency crises, inflation episodes, endogenous collusion in oligopoly, and cycles of economic activity. This review considers and contrasts two currently existing approaches to the analysis of escape dynamics: the discrete-time approach employed, for example, by Cho, Williams and Sargent (2002), and the continuous-time approach proposed by Kasa (2004) and extended recently by Kolyuzhnov, Bogomolova and Slobodyan (2014), stressing the advantages of the latter. The continuous-time approach is based on the application of the results of the continuous-time version of the large deviations theory to the diffusion approximation of the original discrete-time dynamics under learning. Escape dynamics is characterized by analytically deriving the most probable escape point and mean escape time. The paper provides an example of the continuous-time approach applied to the Phelps problem of a government controlling inflation while adaptively learning the approximate Phillips curve.

Keywords: constant gain adaptive learning, escape dynamics, recursive least squares, large deviations theory

References

1. Fuchs G. Is error learning behavior stabilizing? *Journal of Economic Theory*, 1979, vol. 20, p. 300–317.

2. Fuchs G., Laroque G. Dynamics of temporary equilibria and expectations. *Econometrica*, 1976, vol. 44, p. 1157–1178.

3. Grandmont J.-M. On endogenous competitive business cycles. *Econometrica*, 1985, vol. 53, p. 995–1045.

4. Grandmont J.-M. Expectations formation and stability of large socioeconomic systems. *Econometrica*, 1998, vol. 66, p. 741–781.

5. Grandmont J.-M., Laroque G. Stability of cycles and expectations. *Journal of Economic Theory*, 1986, vol. 40, p. 138–151.

6. Bray M. M. Learning, estimation, and the stability of rational expectations equilibria. *Journal of Economic Theory*, 1982, vol. 26, p. 318–339.

7. Bray M. M., Savin N. E. Rational expectations equilibria, learning, and model specification. *Econometrica*, 1986, vol. 54 (5), p. 1129–1160.

8. Fourgeaud C., Gourieroux C., Pradel J. Learning procedures and convergence to rationality. *Econometrica*, 1986. vol. 54 (4), p. 845–868.

9. Marcet A., Sargent T. J. Convergence of least squares learning mechanisms in self-referential linear stochastic models. *Journal of Economic Theory*, 1989, vol. 48 (2), p. 337–368.

10. Evans G. W., Honkapohja S. Learning, convergence, and stability with multiple rational expectations equilibria. *European Economic Review*, 1994, vol. 38, p. 1071–1098.

11. Evans G. W., Honkapohja S. On the local stability of sunspot equilibria under adaptive learning rules. *Journal of Economic Theory*, 1994, vol. 64, p. 142–161.

12. Evans G. W., Honkapohja S. Local convergence of recursive learning to steady states and cycles in stochastic nonlinear models. *Econometrica*, 1995, vol. 63, p. 195–206.

13. Arifovic J. Genetic algorithm learning and the cobweb model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1994, vol. 18, p. 3–28.

14. Kirman A. P., Vriend N. J. Evolving market structure: An ACE model of price dispersion and loyalty. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2001, vol. 25, p. 459–502.

15. Cho I.-K., Sargent T. J. Neural networks for encoding and adapting in dynamic economies. In H. M. Amman, D. A. Kendrick, and J. Rust, editors, *Handbook of Computational Economics*, 1996, p. 441–470.

16. Marimon R. Learning from learning in economics. In David M Kreps and Kenneth F Wallis, editors, *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications*, vol. 1, chapter 9, Cambridge University Press, 1997, p. 278–315.

17. Giannitsarou Ch. Heterogeneous learning. *Review of Economic Dynamics*, 2003, vol. 6, p. 885–906.

18. Honkapohja S., Mitra K. Learning stability in economies with heterogeneous agents. *Review of Economic Dynamics*, 2006, vol. 9 (2), p. 284–309.

19. Cho I.-K., Kasa K. Learning dynamics and endogenous currency crises. *Macroeconomic Dynamics*, 2008, vol. 12, p. 257–285.

20. Sargent T. J. Bounded Rationality in Macroeconomics. Oxford; N. Y.: Oxford University Press, Clarendon Press, 1993.

21. Evans G. W., Honkapohja S. Learning and Expectations in Macroeconomics. Princeton, NJ.: Princeton University Press, 2001.

22. Williams N. Escape Dynamics in Learning Models. PhD thesis, University of Chicago, 2001.

23. Williams N. Stability and long run equilibrium in stochastic fictitious play. Manuscript, Princeton University, 2002.

24. Williams N. Adaptive learning and business cycles. Manuscript, Princeton University, 2003.

25. Williams N. Small noise asymptotics for a stochastic growth model. *Journal of Economic Theory*, 2004, vol. 119 (2), p. 271–298.

26. Bullard J. B., Cho I.-K. Escapist policy rules. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2005, vol. 29 (11), p. 1841–1865.

27. Cho I.-K., Williams N., Sargent T. J. Escaping Nash inflation. *Review of Economic Studies*, 2002, vol. 69 (1), p. 1–40.

28. Kasa K. Learning, large deviations, and recurrent currency crises. *International Economic Review*, 2004, vol. 45, p. 141–173.
29. Sargent T. J. The Conquest of American Inflation. Princeton, NJ.: Princeton University Press, 1999.
30. Kolyuzhnov D., Bogomolova A., Slobodyan S. Escape Dynamics: A Continuous-Time Approximation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2014, vol. 38 (1), p. 161–183. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165188913002029
31. Freidlin M. I., Wentzell A. D. Random Perturbations of Dynamical Systems, second edition. New York: Springer-Verlag, 1998.
32. Barro R. J., Gordon D. B. A positive theory of monetary policy in a natural-rate model. *Journal of Political Economy*, 1983, vol. 91, p. 589–610.
33. Barro R. J., Gordon D. B. Rules, discretion, and reputation in a model of monetary policy. *Journal of Monetary Economics*, 1983, vol. 12, p. 101–121.
34. Kydland F. E., Prescott E. C. Rules rather than discretion: The inconsistency of optimal plans. *Journal of Political Economy*, 1977, vol. 85, p. 473–491.
35. Dupuis P., Kushner H. J. Stochastic approximation and large deviations: Upper bounds and w.p.1 convergence. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1989, vol. 27, p. 1108–1135.
36. Dembo A., Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1998.
37. Dahleh M., Dahleh M. A., Verghese G. Lectures on dynamic systems and control. MIT lecture notes, 2004.
38. Kandori M., Mailath G. J., Rob R. Learning, mutation, and long run equilibria in games. *Econometrica*, 1993, vol. 61, p. 29–56.
39. Binmore K., Samuelson L. Muddling through: Noisy equilibrium selection. *Journal of Economic Theory*, 1997, vol. 74, p. 235–265.

For citation:

Bogomolova A. S., Kolyuzhnov D. V. Escape Dynamics as a Way to Describe Economic Phenomena. *World of Economics and Management*, 2017, vol. 17, no. 2, p. 56–71. (In Russ.)