Научная статья

УДК 334.72 + 336.63 + 519.8
JEL C44, C61, D81
DOI 10.25205/2542-0429-2021-21-3-120-131

Планирование закупки товаров минимального ассортимента с учетом неопределенности спроса

Дмитрий Борисович Андреев [1]
Александр Борисович Хуторецкий [2]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Москва, Россия

[2] Новосибирский национальный исследовательский университет
Новосибирск, Россия

[1] dima-andr98@mail.ru
[2] khutoretskij@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-2189-1178

Аннотация

На некоторые предприятия розничной торговли (например, лекарственными препаратами) возложена ответственность за надежное удовлетворение спроса на товары минимального ассортимента, которые, как правило, не являются прибыльными. В отношении таких товаров предприятие стремится не к получению прибыли, а к удовлетворению неопределенного спроса. Мы предполагаем, что: (а) вектор спроса на товары минимального ассортимента в плановом периоде заключен «между» векторами спроса нескольких предшествующих периодов (является выпуклой линейной комбинацией этих векторов); (б) чем меньше максимальная (по группам товаров и возможным векторам спроса) величина неудовлетворенного спроса, тем больше надежность удовлетворения спроса. При этих предположениях мы рассматриваем задачу распределения ограниченного закупочного бюджета между группами товаров для максимально надежного удовлетворения неопределенного спроса. В статье показано, что эта задача эквивалентна поиску оптимальной по критерию Вальда стратегии в некоторой игре с природой и сводится к задаче линейного программирования. С учетом специфики задачи предложен быстрый (квадратичной трудоемкости) алгоритм построения оптимального плана закупок. Модель может быть использована при планировании закупок товаров минимального ассортимента, чтобы обеспечить максимальную надежность удовлетворения спроса, достижимую в рамках выделенного бюджета. Насколько нам известно, такая постановка задачи в предшествующей литературе не изучалась.

Ключевые слова

неопределенность спроса, игра с природой, линейное программирование, быстрый алгоритм

Для цитирования

Андреев Д. Б., Хуторецкий А. Б. Планирование закупки товаров минимального ассортимента с учетом неопределенности спроса // Мир экономики и управления. 2021. Т. 21, № 3. С. 120–131. DOI 10.25205/2542-0429-2021-21-3-120-131

Purchase Planning for Minimum Assortment Goods Given the Uncertainty of Demand

Dmitry B. Andreev [1], **Alexandr B. Khutoretsky** [2]

[1] National Research University "Higher School of Economics"
Moscow, Russian Federation

[2] Novosibirsk State University
Novosibirsk, Russian Federation

[1] dima-andr98@mail.ru
[2] khutoretskij@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-2189-1178

Abstract

Some retailers (e.g. pharmacies) are responsible for satisfying the demand for the minimum range of goods, which are generally unprofitable. With respect to such goods, the enterprise seeks to satisfy uncertain demand rather than to make profit. We assume that: (a) the vector of demand for goods of the minimum assortment in the planning period lies "between" the demand vectors of several previous periods (is a convex linear combination of these vectors); (b) the smaller the maximum unsatisfied demand (by product groups and possible vectors of demand), the greater is the reliability of meeting the demand. Under these assumptions, we address the problem of allocating a limited procurement budget among commodity groups to meet uncertain demand most reliably. The article shows that this problem is equivalent to finding an optimal strategy by Wald's criterion in some game with nature and can be reduced to a linear programming problem. Using the problem features, we propose a fast (having quadratic complexity) algorithm for constructing an optimal procurement plan. The model can be used when planning the minimum assortment goods procurement in order to maximize the meeting demand reliability, achievable within the allocated budget. As far as we know, such a formulation of the problem has not been studied in the previous literature.

Keywords

demand uncertainty, game with nature, linear programming, fast algorithm

For citation

Andreev D. B., Khutoretsky A. B. Purchase Planning for Minimum Assortment Goods Given the Uncertainty of Demand. *World of Economics and Management*, 2021, vol. 21, no. 3, pp. 120–131. (in Russ.) DOI 10.25205/2542-0429-2021-21-3-120-131

Введение

Цель статьи – моделирование ситуации, в которой экономическая система стремится не к получению прибыли, а к удовлетворению неопределенного спроса. Неопределенность состоит в том, что информация о спросе исчерпывается набором значений, реализовавшихся в предшествующие периоды. Для определенности будем говорить о минимальном ассортименте в розничной торговле лекарственными препаратами.

Согласно части 6 статьи 55 Федерального закона от 12.04.2010 № 61-ФЗ (ред. от 27.12.2019) «Об обращении лекарственных средств» (с изменениями и дополнениями, вступившими в силу с 01.03.2020) аптечные организации и индивидуальные предприниматели, имеющие лицензию на фармацевтическую деятельность, обязаны обеспечивать минимальный ассортимент лекарственных препаратов, необходимых для оказания медицинской помощи. Правительство РФ ежегодно утверждает перечень лекарственных товаров минимального ассортимента, возлагая на розничных продавцов ответственность за надежное удовлетворение спроса на эти товары, даже если они не являются прибыльными.

Авторы большинства работ, посвященных формированию ассортимента лекарственных товаров (например, [1–4]), ограничиваются ABC/XYZ-анализом.

С помощью ABC-анализа множество всех доступных товаров разбивают на группы соответственно избранному «экономическому» критерию (товарооборот, стоимость запасов, спрос, затраты, доход и т. д.). Критерий может быть числовым или качественным. Чаще всего используют трехточечную шкалу, выделяя группы A, B, C. Широко применяется двухфакторный ABC-анализ, заключающийся в классификации всех позиций ассортимента по двум факторам: объему продаж и удельной чистой прибыли. В результате двухфакторного ABC-анализа с трехточечной шкалой для каждого фактора ассортимент разделяется на 9 групп. Такая классификация, как правило, относит минимальный ассортимент к группе товаров, не приносящих существенной прибыли, но обеспечивающих приток посетителей и значительный объем продаж (A, C).

XYZ-анализ состоит в структурировании множества товаров по стабильности (надежности прогнозирования) потребления. При трехточечной шкале потребление лекарственных средств из группы X имеет почти стабильный характер, группа Y характеризуется специфической динамикой потребления (например, сезонностью) или нестабильностью. Прочие товары относят к группе Z.

Обычно ABC-анализ товаров по полученному доходу или по количеству проданного товара (за учетный период) сочетают с XYZ-анализом товаров за тот же период. При этом ABC-анализ дает оценку прогнозируемого дохода, а XYZ-анализ – оценку надежности получения такого дохода.

Результаты ABC/XYZ-анализа используют для формирования ассортимента, применяя эвристические правила. В работе [3] эти правила сформулированы примерно следующим образом. Относительно товаров групп AX и BX (большой товарооборот и стабильность) необходимо обеспечить постоянное наличие без создания значительного страхового запаса. Для товаров групп AY и BY (существенный товарооборот и недостаточная стабильность спроса) нужно поддерживать наличие за счет увеличения страхового запаса. Аналогичные рекомендации даны и для других групп товаров. В частности, товары минимального ассортимента при такой классификации попадают в группу CX (небольшой товарооборот и надежный прогноз спроса), для них рекомендовано использовать систему поставок с постоянной периодичностью и снизить страховой запас. Эвристические правила, подобные описанным выше, желательно дополнить методикой определения целесообразных объемов закупок.

В работе [5] формирование ассортимента аптечных товаров формализовано в виде задачи многокритериальной оптимизации с тремя максимизируемыми целевыми функциями: валовая прибыль, товарооборот и доля рынка. Выбор осуществляется из трех предварительно сформированных вариантов ассортимента, один из которых оказывается лучшим по всем указанным критериям. Необходимость включения в ассортимент товаров минимального ассортимента в достаточных количествах не учтена.

В статье [6] рассматривается задача формирования оптимального ассортимента лекарственных средств в аптечных организациях. Проблема формализована в виде задачи линейного программирования. В модели присутствуют ограничения на приобретение товаров минимального ассортимента. Следовательно, авторы предполагают, что спрос на эти товары известен (или надежно спрогнозирован), не принимая во внимание неопределенность спроса.

Ни одна из известных нам работ, использующих математические методы для формирования ассортимента, не учитывает и необходимость закупки товаров минимального ассортимента в достаточных количествах, и неопределенность спроса на эти товары.

1. Постановка и формализация задачи

Специфика формирования минимального ассортимента заключается в том, что соображения выгодности отходят на второй план, а главным критерием является надежность удовлетворения спроса. Следовательно, нужно использовать критерий не ожидаемого, а гарантированного результата, так как при большой дисперсии отклонения от ожидаемого спроса могут быть существенными, что снижает надежность. Учитывая это, мы формализуем задачу с помощью модели игры с природой, в которой ЛПР определяет объемы закупки товаров минимального ассортимента, а «природа» определяет спрос.

Будем считать, что все товары минимального ассортимента распределены на m групп и определена единица измерения количества товаров каждой группы (например, «стандартная упаковка»).

Положим $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{1, \ldots, n\}$. Допустим, что есть информация о спросе за n предыдущих периодов. Пусть d_{ij} – спрос на товары группы $i \in I$ в период $j \in J$, тогда $D_j = (d_{1j}, \ldots, d_{mj})^{\mathrm{T}}$ – вектор спроса на товары минимального ассортимента в период j. Варианты спроса D_j считаем чистыми стратегиями природы. Смешанной стратегией природы (сценарием) является выпуклая линейная комбинация векторов D_j:

$$D(\mu) = \sum_j \mu_j D_j, \text{ где } \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}_+^n, \sum_j \mu_j = 1. \tag{1}$$

Иначе говоря, мы предполагаем, что в плановом периоде возможны только векторы спроса, заключенные «между» ранее наблюдавшимися векторами D_j.

Стратегия ЛПР – это вектор $x = (x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$, где $x_i \geq 0$ – планируемые затраты на приобретение товаров группы i (из минимального ассортимента). Пусть K – бюджет, выделенный на приобретение товаров минимального ассортимента. Тогда

$$\sum_i x_i \leq K.$$

Пусть n_i – остаток товаров группы i после предыдущего расчетного периода, а p_i – средняя цена, по которой аптека покупает товары группы i, тогда x_i / p_i – количество (стандартных упаковок) закупленных товаров группы i при стратегии x.

При фиксированном сценарии $D(\mu)$ будем оценивать стратегии ЛПР по критерию надежности. Положим

$$\Delta_i(x,\mu)=\sum_j \mu_j d_{ij}-\left(\frac{x_i}{p_i}+n_i\right).$$

Будем считать, что стратегия x надежна по ассортиментной группе i при сценарии $D(\mu)$, если сумма остатков и закупок товаров группы i не меньше, чем спрос при этом сценарии, т. е. $\Delta_i(x,\mu)\le 0$. Если же $\Delta_i(x,\mu)>0$ (спрос не удовлетворен), то будем считать, что надежность стратегии x по группе i при сценарии $D(\mu)$ тем больше, чем меньше $\Delta_i(x,\mu)$.

Теперь максимизацию надежности мы можем заменить минимизацией «ненадежности». Ненадежность стратегии x по группе i при сценарии $D(\mu)$ равна нулю, если $\Delta_i(x,\mu)\le 0$, в противном случае мерой ненадежности будем считать величину $\Delta_i(x,\mu)$. Другими словами, оценкой ненадежности стратегии x по группе i при сценарии $D(\mu)$ является дефицит товаров группы i:

$$s_i(x,\mu)=\left[\Delta_i(x,\mu)\right]^+.$$

Максимум $s_i(x,\mu)$ по всем группам товаров – это оценка ненадежности стратегии x при сценарии $D(\mu)$. Будем считать $S(x,\mu)=\max\{s_i(x,\mu)\mid i\in I\}$ функцией «проигрыша» ЛПР.

Формализуем задачу формирования минимального ассортимента как игру с природой $G=\langle X, M, u(x,\mu)\rangle$, где X – множество стратегий ЛПР, M – множество сценариев природы, $u(x,\mu)$ – функция выигрыша ЛПР, причем

$$X=\left\{x=\left(x_1,\ldots,x_m\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}_+^m\,\middle|\,\sum_i x_i\le K\right\},$$

$$M=\left\{D(\mu)\,\middle|\,\mu=\left(\mu_1,\ldots,\mu_n\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}_+^n,\sum_j \mu_j=1\right\},$$

$$u(x,\mu)=-S(x,\mu).$$

Положим $P(x)=-\min\{u(x,\mu)\mid \mu\in M\}=\max\{S(x,\mu)\mid \mu\in M\}$. Это «гарантированный» дефицит товара при стратегии x (гарантированный в том смысле, что ни по какой группе товаров и ни при каком сценарии дефицит не будет больше этой величины). Максимизируя надежность, ЛПР стремится выбрать стратегию, минимизирующую гарантированный дефицит. Это соответствует максимизации функции $-P(x)$ и, следовательно, применению к игре G критерия Вальда (см., например, [7, гл. 4]) с оценочной функцией $-P(x)$.

Итак, ЛПР решает следующую «минимаксную» задачу:

$$P(x)=\max_{\mu\in M} S(x,\mu)\to\min_{x\in X}. \tag{2}$$

Решению x задачи (2) соответствует ассортимент, включающий x_i/p_i стандартных упаковок товаров группы i (для каждого $i\in I$). Этот ассортимент, в рамках бюджетного ограничения, минимизирует максимум неудовлетворенного спроса с учетом неопределенности спроса.

2. Сведение к задаче линейного программирования

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$z \to \min \text{ при условиях} \tag{3}$$

$$z \ge d_{ij} - \left(\frac{x_i}{p_i} + n_i \right) \text{ для всех } i, j, \tag{4}$$

$$z \ge 0, \tag{5}$$

$$x \in X. \tag{6}$$

Утверждение 1. Вектор x является решением задачи (2), если и только если набор (x, z) при некотором z является решением задачи (3)–(6).

Доказательство. Пусть (x, z) – решение задачи (3)–(6). Из (3), (4) и (5) следует, что

$$z = \max\left\{0, \max_{i,j}\left[d_{ij} - \left(\frac{x_i}{p_i} + n_i\right)\right]\right\}.$$

Значит, задача (3)–(6) эквивалентна следующей задаче:

$$f(x) = \max\left\{0, \max_{i,j}\left[d_{ij} - \left(\frac{x_i}{p_i} + n_i\right)\right]\right\} \to \min_{x \in X}. \tag{7}$$

Задачи (2) и (7) имеют одинаковые множества допустимых решений. Покажем, что целевые функции этих задач на множестве X тоже совпадают, т. е. $f(x) = P(x)$ для всех $x \in X$. При фиксированном $x \in X$ возможны следующие случаи.

Случай 1: $\Delta_i(x, \mu) > 0$ для некоторых $\mu \in M$, $i \in I$. Тогда

$$\max_{\mu \in M} \max_i \left[\Delta_i(x, \mu)\right]^+ = \max_{\mu \in M} \max_i \Delta_i(x, \mu) = \max_i \max_{\mu \in M} \Delta_i(x, \mu).$$

Функция $\Delta_i(x, \mu)$ линейна по μ, поэтому в последнем выражении внутренний максимум при любом i достигается в вершине многогранника M, т. е. при одной из чистых стратегий природы. Тогда для любого $i \in I$ имеем

$$\max_{\mu \in M} \Delta_i(x, \mu) = \max_{j \in J}\left[d_{ij} - \left(\frac{x_i}{p_i} + n_i\right)\right].$$

Отсюда

$$P(x) = \max_{\mu \in M} \max_i \left[\Delta_i(x, \mu)\right]^+ = \max_{i,j}\left[d_{ij} - \left(\frac{x_i}{p_i} + n_i\right)\right] > 0.$$

Тогда $f(x) = P(x)$.

Случай 2: $\Delta_i(x, \mu) \le 0$ для всех $\mu \in M$ и $i \in I$. Тогда $s_i(x, \mu) = 0$ для всех μ, i, поэтому $S(x, \mu) = 0$ для всех μ и $P(x) = 0 = f(x)$.

Следовательно, $f(x) = P(x)$ в любом случае. Утверждение доказано.

Итак, исходная «минимаксная» задача (2) эквивалентна задаче линейного программирования (3)–(6).

3. Решение задачи (3)–(6)

Утверждение 1 обосновывает возможность решения задачи (2) применением одного из универсальных алгоритмов линейного программирования к задаче (3)–(6). Простая структура решений задачи (3)–(6) позволяет построить специализированный быстрый алгоритм решения этой задачи и, следовательно, эквивалентной задачи (2).

3.1. Анализ задачи

Пусть $b_i = \max\{d_{ij} \mid j \in J\} - n_i$, (x, z) – допустимое решение задачи (3)–(6). Положим $g_i(x_i) = b_i - x_i / p_i$, $I_1(x, z) = \{i \mid g_i(x_i) = z\}$, $z(x) = \max\{0, \max_i g_i(x_i)\}$. Понятно, что $(x, z(x))$ – допустимое решение задачи (3)–(6) при любом $x \in X$.

Утверждение 2.

(а) Если

$$K \ge \sum_i p_i b_i \,, \tag{8}$$

то пара $(x, 0)$, где $(x = (p_1 b_1, \ldots, p_m x_m)^{\mathrm{T}}$, является оптимальным решением задачи (3)–(6).

(б) Если условие (8) не выполнено и (x, z) – оптимальное решение задачи (3)–(6), то $z > 0$ и

$$\sum_i x_i = K \,. \tag{9}$$

Доказательство.

(а) Пусть выполнено условие (8), т. е. бюджет позволяет покрыть расходы на полное удовлетворение максимального спроса по каждой группе товаров. Тогда при $x = (p_1 x_1, \ldots, p_m x_m)^{\mathrm{T}}$ выполнено условие (6), а правая часть неравенства (4) неположительна для всех i, j. Следовательно, $(x, 0)$ – допустимое решение задачи (3)–(6). Оно оптимально, так как в любом допустимом решении (y, z) этой задачи $z \ge 0$ по (5).

(б) Пусть (x, z) – оптимальное решение задачи (3)–(6) и

$$K < \sum_i p_i b_i \,. \tag{10}$$

Из (6) следует, что $x_k < p_k x_k$ для некоторого k. Зафиксируем такое k. Правая часть неравенства (4) положительна при $i = k$ и $j = \operatorname{argmax}\{d_{ks} \mid s \in J\}$, поэтому $z > 0$. Значит,

$$z = \max_{i,j}\left[d_{ij} - \left(\frac{x_i}{p_i} + n_i \right) \right].$$

Если $d_{ij} - (x_i / p_i + n_i) = z$, то $d_{ij} = \max_k\{d_{ik}\}$ и

$$d_{ij} - \frac{x_i}{p_i} - n_i = b_i - \frac{x_i}{p_i} = g_i(x_i)\ ,$$

поэтому $i \in I_1(x, z)$. Допустим, что

$$\sum_i x_i < K\ .$$

Тогда существует число ε такое, что

$$0 < \varepsilon < \frac{K - \sum_i x_i}{|I_1(x, z)|}\ .$$

Положим $y_i = x_i + \varepsilon$ для $i \in I_1(x, z)$, $y_i = x_i$ для $i \notin I_1(x, z)$ и $y = (y_i \mid i \in I)^{\mathrm{T}}$. Тогда $y \in X$ и $\max_{i,j}\{d_{ij} - x_i / p_i + n_i) < z$, что противоречит оптимальности решения (x, z). Следовательно, выполняется условие (9).

Утверждение 2 доказано.

Часть (а) утверждения 2 указывает на решение задачи (3)–(6) при условии (8), поэтому далее считаем, что выполнено неравенство (10).

Утверждение 3. Если выполнено условие (10), (x, z) – оптимальное решение задачи (3)–(6) и $x_k > 0$, то $g_k(x_k) = z$.

Доказательство. Пусть (x, z) – оптимальное решение задачи (3)-(6) и $x_k > 0$. По условию (4) $z \ge g_k(x_k)$. Допустим, что $z > g_k(x_k)$. Из части (б) утверждения 2 следует, что $z > 0$. Тогда $z = g_i(x_i)$ для некоторого i, и $I_1(x, z) \neq \varnothing$, причем $k \notin I_1(x, z)$ по предположению. Положим $y_i = x_i + \varepsilon / |I_1(x, z)|$ для всех $i \in I_1(x, z)$, $y_k = x_k - \varepsilon$ и $y_i = x_i$ для $i \notin I_1(x, z) \cup \{k\}$. При этом выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялись условия $z > g_k(y_k)$ и $y_k \ge 0$; это возможно, так как $z > g_k(x_k)$ и $x_k \ge 0$.

Положим $z' = z(y)$. Очевидно, что (y, z') – допустимое решение задачи (3)–(6) и $z' < z$, что противоречит выбору (x, z). Следовательно, $g_k(x_k) = z$.

Утверждение доказано.

Для $x \in X$ обозначим: $I_+(x) = \{i \mid x_i > 0\}$. Из утверждения 3 следует, что в оптимальном решении (x, z) задачи (3)–(6) для любого i либо $b_i - x_i / p_i = z$, либо $x_i = 0$. Тогда для $i \in I_+(x)$ имеем

$$x_i = (b_i - z)\, p_i\,. \tag{11}$$

Суммируя по $i \in I_+(x)$ и учитывая часть (б) утверждения 2, получим

$$\sum_{i \in I_+(x)} (b_i - z)\, p_i = K\ .$$

Отсюда

$$z = \frac{\sum_{i \in I_+(x)} b_i p_i - K}{\sum_{i \in I_+(x)} p_i}\ ,$$

и подстановкой в (11) найдем x_i для $i \in I_+(x)$, а остальные координаты вектора x равны нулю.

Осталось определить множество $I_+(x)$. При условии (10) в оптимальном решении (x, z) имеем $z = \max\{g_i(x_i) \mid i \in I\}$ и $g_i(x_i) = b_i$ для $i \notin I_+(x)$, откуда $z \geq b_i$ для $i \notin I_+(x)$. Из утверждения 3 следует, что $z < b_i$ для $i \notin I_+(x)$. Изложенный ниже алгоритм использует эти факты, чтобы построить оптимальное решение задачи параллельно с формированием соответствующего множества $I_+(x)$.

3.2. Алгоритм

Пусть $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_r$ – все различные значения параметров b_i, упорядоченные по убыванию, $B_k = \{i \mid b_i = \beta_k\}$. Положим $\beta_{r+1} = 0$.

Алгоритм работает по шагам и формирует вектор $x \in X$, начиная с нуль-вектора. На каждом шаге пара $(x, z(x))$ является допустимым решением задачи (3)–(6). Обозначим K' не использованную до начала очередного шага часть бюджета K. На шаге k алгоритм увеличивает координаты вектора x с номерами из множества

$$A(k) = \bigcup_{s=1}^{k} B_s$$

так, что после этого шага $z(x) \in [\beta_{k+1}, \beta_k)$. Алгоритм выполняет не более r шагов. План x на каждом шаге улучшается и после последнего шага является оптимальным решением задачи (3)–(6).

Перед шагом 1 положим $x_i = 0$ (откуда $g_i(x_i) = b_i$) для всех i, $K' = K$. Тогда $z(x) = \max_i b_i = \beta_1$. Следовательно, при $k = 1$ выполнены условия

$$g_i(x_i) = z(x) = \beta_k \text{ для } i \in A(k). \tag{12}$$

Шаг $k \geq 1$. Допустим, что в начале этого шага выполнено условие (12). Мы хотим для всех $i \in A(k)$ уменьшить $g_i(x_i)$ до β_{k+1} или, если это невозможно, на максимальную величину a в рамках бюджета K'.

Чтобы уменьшить $g_i(x_i)$ для всех $i \in A(k)$ до β_{k+1}, нужно увеличить x_i для таких i на $\alpha_i = (\beta_k - \beta_{k+1})p_i$. Это возможно, только если суммарные затраты на такое увеличение не больше K', т. е.

$$(\beta_k - \beta_{k+1}) \sum_{i \in A(k)} p_i \leq K'.$$

Если последнее неравенство не выполнено, то алгоритм должен уменьшить $g_i(x_i)$ для $i \in A(k)$ на максимальную возможную величину a, т. е. x_i для каждого $i \in A(k)$ нужно увеличить на ap_i. Бюджетное ограничение дает

$$a \sum_{i \in A(k)} p_i \leq K',$$

и из условия максимальности a находим

$$a = \frac{K'}{\sum_{i \in A(k)} p_i}.$$

Учитывая предшествующие рассуждения, изменим вектор x следующим образом: $x_i := x_i + \alpha_i$ для $i \in A(k)$, где

$$\alpha_i = \begin{cases} (\beta_k - \beta_{k+1}) p_i, \text{ если } \sum_{s \in A(k)} p_s \le \dfrac{K'}{\beta_k - \beta_{k+1}}, \\ K' \dfrac{p_i}{\sum_{s \in A(k)} p_s} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Если $k = r$, то процедура закончена. Пусть $k < r$.

Если в определении α_i реализовался первый случай, то после изменения вектора x имеем $g_i(x_i) = \beta_{k+1} = z(x)$ для $i \in A(k)$. Положим

$$K' := K' - (\beta_k - \beta_{k+1}) \sum_{i \in A(k)} p_i .$$

Если $K' = 0$, то процедура закончена, иначе переходим к шагу $k + 1$. При этом $x_i = 0$ для $i \notin A(k)$ и $z(x) = \beta_{k+1}$ для $i \in B_{k+1}$. Следовательно, $g_i(x_i) = \beta_{k+1} = z(x)$ для $i \in A(k + 1)$, условие (12) выполнено в начале шага $k + 1$.

Если на шаге k реализовался второй случай определения α_i то после этого шага $\beta_k > g_i(x_i) = z(x) > \beta_{k+1}$ для всех $i \in A(k + 1)$, бюджет исчерпан, процедура закончена.

Утверждение 4. Пусть вектор x построен описанным выше алгоритмом. Тогда пара (x, z), где $z = z(x) = \max\{g_i(x_i) \mid i \in I\}$ является оптимальным решением задачи (3)–(6).

Доказательство. По построению $g_i(x_i) = z$ для $i \in I_+(x)$ и выполняется равенство (9). Предположим, что (y, z') – оптимальное решение задачи (3)–(6), $y = (y_i \mid i \in I)^{\mathrm{T}} \in X$ и $z' < z$. Мы применяем алгоритм в случае (10), поскольку для случая (8) решение задачи (3)–(6) указано частью (а) утверждения 2. Из утверждения 3 следует $g_i(x_i) = z > z' = \max_k\{g_k(y_k)\} \ge g_i(y_i)$ для $i \in I_+(x)$. Значит, $y_i > x_i$ для $i \in I_+(x)$. Тогда

$$\sum_i y_i \ge \sum_{i \in I_+(x)} y_i > \sum_{i \in I_+(x)} x_i = \sum_i x_i = K,$$

что противоречит условию (6). Следовательно, (x, z) – оптимальное решение задачи (3)–(6). Утверждение доказано.

Поскольку алгоритм требует не более n шагов и на каждом шаге нужно вычислить не более m значений α_i, трудоемкость алгоритма равна $O(mn)$.

3.3. О входной информации

Из информации о спросе предшествующих периодов, заключенной в векторах D_j, $j \in J$, алгоритм использует только величины $\max\{d_{ij} \mid j \in J\}$, т. е. оценки максимального спроса по каждой группе товаров. Следовательно, имея оценки δ_i максимального возможного спроса на товары каждой группы в плановом периоде, независимо от способа построения этих оценок, можно вычислить значения $b_i = \delta_i - n_i$ и реализовать алгоритм, описанный в разделе 3.2. Это позволяет, если нужно, учесть специфику спроса при формировании входной информации. Например, если агрегированный спрос на товары группы i имеет выраженный тренд-сезонный характер, оценку δ_i можно получить с помощью соответствующей эконометрической модели.

Заключение

В статье сформулирована и формализована в виде игры с природой задача распределения ограниченного закупочного бюджета между группами товаров для удовлетворения неопределенного спроса. Применительно к этой игре критерий Вальда описывает минимизацию максимального (по группам товаров) неудовлетворенного спроса при бюджетном ограничении. Соответствующая оптимизационная задача сведена к задаче линейного программирования.

Кроме того, обоснован быстрый алгоритм построения оптимального плана, учитывающий специфику задачи.

Модель может быть использована при планировании закупок товаров минимального ассортимента для обеспечения максимальной надежности удовлетворения спроса, достижимой в рамках выделенного бюджета.

Список литературы

1. **Громовик Б. П.** Управление товарным ассортиментом фармацевтического предприятия с помощью ABC и XYZ-анализа // Маркетинг и реклама. 1999. № 1. С. 39–45.
2. **Лисовский П. А.** Формирование ассортимента аптечной сети методом каскадного использования ABC * XYZ-анализа // Вестник ИНЖЭКОН. Серия: Экономика. 2009. Вып. 2 (29). С. 260–264.
3. **Сергеева Л. А., Попова Н. Б., Попова Э. У.** Механизм формирования ассортимента лекарственных препаратов для реализации в аптеках // Актуальные исследования – 2018: Сб. ст. Нефтекамск: Мир науки, 2018. С. 320–327.
4. **Самощенкова И. Ф., Гаранкина Р. Ю.** Категорийный менеджмент в управлении минимальным ассортиментом аптечной организации // Фармация и фармакология. 2017. № 1. С. 49–63.
5. **Джупарова И. А.** Разработка экономико-математической модели формирования товаров аптечного ассортимента // Медицина и образование в Сибири: сетевое издание. 2012. № 2. URL: http://ngmu.ru/cozo/mos/article/pdf.php?id =676.
6. **Истомина А. А., Сумарокова Н. Н., Истомин А. Л.** Постановка задачи нахождения оптимального ассортимента лекарственных средств // Вестник АГТА. 2014. № 8. С. 17–20.
7. **Вилкас Э. Й.** Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990. 256 с.

References

1. **Gromovik B. P.** Product assortment management of a pharmaceutical company using ABC and XYZ analysis. *Marketing and advertising*, 1999, no. 1, pp. 39–45. (in Russ.)
2. **Lisovsky P. A.** Formation of a pharmacy chain assortment by the method of cascading use of ABC * XYZ analysis. *Vestnik INZHEKON. Seriia: Ekonomika*, 2009, no. 2 (29), pp. 260–264. (in Russ.)
3. **Sergeeva L. A., Popova N. B., Popova E. U.** Mechanism for forming a range of medicines for sale in pharmacies. In: Aktual'nye issledovaniya – 2018: Digest of articles. Neftekamsk, Mir nauki, 2018, pp. 320–327. (in Russ.)
4. **Samoshchenkova I. F., Garankina R. Yu.** Category management in the management of minimum assortment of the pharmaceutical organization. *Pharmacy & Pharmacology*, 2017, no. 1, pp. 49–63. (in Russ.)
5. **Dzhuparova I. A.** Development of an economic-mathematical model for the formation of a pharmacy assortment. *Medicine and education in Siberia: online edition*, 2012, no. 2. (in Russ.) URL: http://ngmu.ru/cozo/mos/article/pdf.php?id =676.
6. **Istomina A. A., Sumarokova N. N., Istomin A. L.** Statement of the problem of finding the optimal range of medicines. *Vestnik AGTA*, 2014, no. 8, pp. 17–20. (in Russ.)
7. **Vilkas E. J.** Optimality in games and decisions. Moscow, Nauka, 1990, 256 p. (in Russ.)

Информация об авторах

Дмитрий Борисович Андреев, студент магистратуры
Александр Борисович Хуторецкий, доктор экономических наук, профессор
SPIN 9275-2232

Information about the Authors

Dmitry B. Andreev, Postgraduate Student
Alexandr B. Khutoretsky, Doctor of Sciences (Economics), Professor
SPIN 9275-2232

Статья поступила в редакцию 24.07.2021;
одобрена после рецензирования 15.08.2021; *принята к публикации 15.08.2021*
The article was submitted 24.07.2021;
approved after reviewing 15.08.2021; *accepted for publication 15.08.2021*